Kapitel 6 – Risiko

Problem – worum geht es in diesem Kapitel?

- Bisher waren wir davon ausgegangen, dass alle zukünftigen Zahlungen sicher bekannt sind.
- Dies ist aber nicht sonderlich realistisch:
  - Der Aktienkurs einer bestimmten Aktie in einem Monat ist unsicher
  - Kein Unternehmen weiß exakt, wie seine Umsätze in Zukunft laufen werden.
  - Zinsen können sich ändern.
  - etc.

Konsequenz

- Deshalb kann man die Verfahren zur Beurteilung von Investitions- und Finanzierungsobjekten, die wir bisher kennengelernt haben, in der Praxis nur eingeschränkt oder gar nicht verwenden.
- Wir sollten uns also unbedingt mit dem Problemfeld „Risiko“ auseinandersetzen.

Überblick

- Dies wirft folgende Fragen auf:

1. Was genau ist „Risiko“ eigentlich?
2. Wie lässt sich Risiko messen?
3. Wie lässt sich Risiko in Entscheidungen integrieren?

6.1 Begriffsklärung: was ist Risiko?

Unsicherheit

- Unsicherheit in Bezug auf eine Zielgröße liegt allgemein vor, wenn man nicht weiß, welche Ausprägung die Zielgröße annehmen wird.
  - Wie hoch ist der Kurs einer Aktie in einer Woche?
  - Regnet es morgen?
  - Welche Zahl erhalte ich, wenn ich einen Würfel werfe?

Risiko

- Risiko kann als eine Unterform der Unsicherheit aufgefasst werden:
  - Die Ausprägung der Zielgrößen ist weiterhin nicht bekannt.
  - Jedoch kennt man nun zwei wichtige Dinge:
    1. Die Menge aller möglichen Ausprägungen.
    2. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Ausprägungen.

Beispiel

- Besonders einfach ist die Situation im Würfelbeispiel:
  - Die Menge aller möglichen Ergebnisse ist {1,2,3,4,5,6}
  - Die Wahrscheinlichkeit jedes dieser möglichen Elementarereignisse ist 1/6.

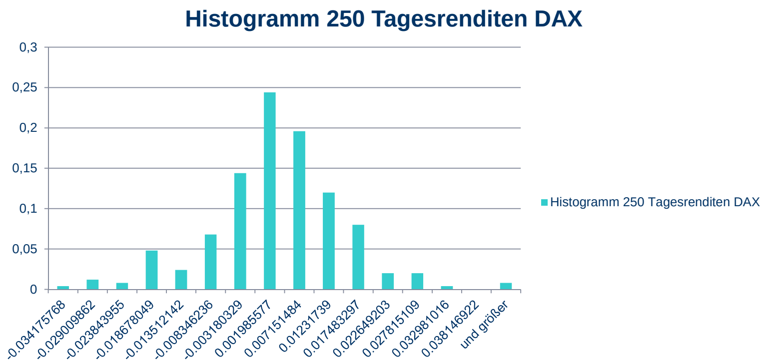
Problem – woher bekommt man die Wahrscheinlichkeiten?

- Leider liegen die Dinge meistens nicht so einfach, wie im Fall des Würfels.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zielgröße ist meistens nicht genau bekannt, ist also selbst unsicher.

Regenbeispiel

- Im Regenbeispiel weiß man nicht so exakt wie im Würfelbeispiel, mit welcher Wahrscheinlichkeit es morgen regnen wird.
- Man kann sich aber damit behelfen, dass man z.B. den Anteil der Regentage im Januar über die letzten zehn Jahre ermittelt und als Wahrscheinlichkeit nimmt.
- Problem:
  - Wenn man nicht die letzten zehn Jahre sondern beispielsweise 5 Jahre nimmt, erhält man ein anderes Ergebnis. Welches „Schätzfenster" soll man nehmen?
  - Vielleicht würde man eine bessere Prognose erhalten, wenn man das Wetter heute mit einbezieht. Welches Modell soll man nehmen?

Beispiel: Histogramm zu 250 DAX-Tagesrenditen (Stand Januar 2013)



Aktienbeispiel

- Man kann die empirischen Häufigkeiten der verschiedenen Histogramm-Klassen als Wahrscheinlichkeiten verwenden.
- Man kann eine bestimmte Verteilung (z.B. Normalverteilung) postulieren und ihre Parameter schätzen.
- Auch hier: das Modell und seine Parameter sind nicht genau bekannt.

Beispiel – Verwendung der empirischen rel. Häufigkeiten

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Tagesrendite von mehr als 2.5 % zu beobachten?
- Bei Verwendung der empirischen rel. Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten:
  - Man erhält 2 % als Antwort, da 5 Überschreitungen in den letzten 250 Handelstagen vorlagen, 2% = 5/250

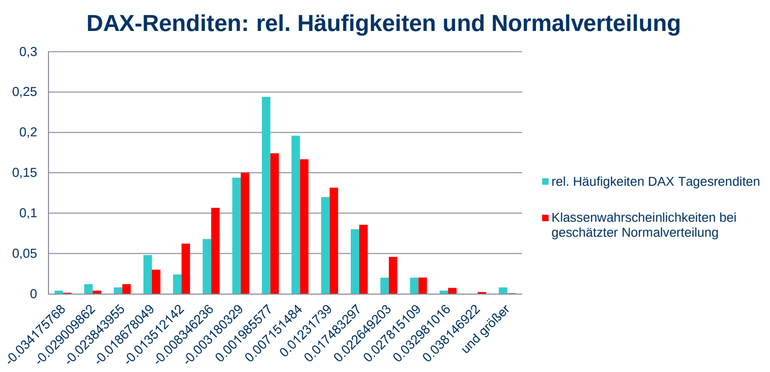
Beispiel: Schätzung einer Normalverteilung

- Die univariate Normalverteilung ist vollständig durch den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ charakterisiert:
- Im Beispiel haben wir:

  $\mu = 0.000812865$

  $\sigma = 0.011647993$

Beispiel: Normalverteilung vs. empirische rel. Häufigkeiten



Beispiel – Verwendung der Normalverteilung

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Tagesrendite von mehr als 2,5% zu beobachten bei der geschätzten Normalverteilung?

  $P(\{R>0.025\})$

  $= 1 - P(\{R \leq 0.025\})$

  $= 1 - F_{\mu,\sigma}(0.025)$

  $= 1 - F_{0,1}(\sigma^{-1} * (0.025 - \mu))$

  $= 1{,}892356$ %
- Man erhält hier ein ähnliches Ergebnis, aber nicht das gleiche.

Zwischenfazit

- Selbst die Annahme, dass Risiko im oben präzisierten Sinne vorliegt, ist restriktiv.
- Im weiteren Verlauf der Veranstaltung gehen wir aber davon aus, dass Wahrscheinlichkeiten für die möglichen relevanten Ergebnisse bekannt sind.

Risiko – Abgrenzung zum umgangssprachlichen Begriff

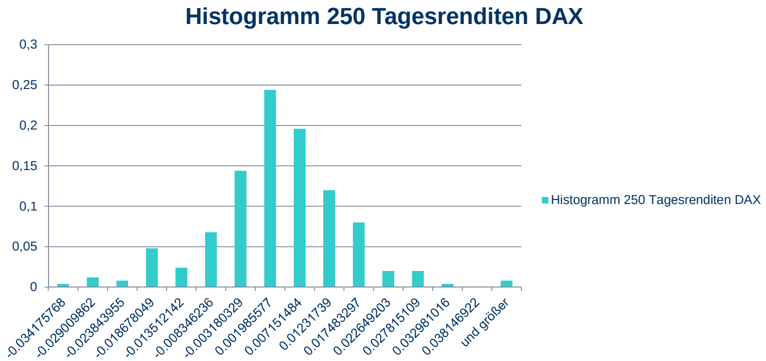
- Umgangssprachlich versteht man unter Risiko nur die Möglichkeit schlechter Ereignisse, für die nicht unbedingt Wahrscheinlichkeiten vorhanden sein müssen.

6.2 Risiko-Maße

Problem

- Risiko ist im Prinzip vollständig charakterisiert, wenn man die möglichen Ausprägungen der Zielgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung kennt.
- Die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist aber sehr schwer greifbar.
- Deshalb definiert man sich Risikomaße, die Teilaspekte der Wahrscheinlichkeitsverteilung charakterisieren.

Beispiel, basierend auf 250 DAX-Tagesrenditen



Beispiel: (diskretisierte) DAX-Tagesrenditen

- R: Tagesrendite
- P(R): Wahrscheinlichkeit der Rendite

	1	2	3	4	5	6	7	8
R	-3.418	-3.159	-2.643	-2.126	-1.610	-1.093	-0.576	-0.060
P(R)	0.004	0.012	0.008	0.048	0.024	0.068	0.144	0.244

	9	10	11	12	13	14	15	16
R	0.457	0.973	1.490	2.007	2.523	3.040	3.556	3.815
P(R)	0.196	0.12	0.08	0.02	0.02	0.004	0	0.008

6.2.1 Symmetrische Risikomaße

Der Erwartungswert

- Der Erwartungswert ist ein mit den Wahrscheinlichkeiten gewichteter Durchschnitt:

  $E(R) = P(R_1)*R_1 + P(R_2)*R_2 + \ldots + P(R_{16})*R_{16}$
- Interpretation: zieht man sehr viele unabhängige Realisationen der Zufallsvariablen R, so wird deren Durchschnitt in der Nähe des Erwartungswertes liegen.

Konkrete Berechnung des Erwartungswertes

- E(R) = -3.418*0.004 +(-3.159)*0.012+ …+3.815*0.008 ≈0,07%
- Multipliziere alle Renditen mit ihren Wahrscheinlichkeiten und addiere die Ergebnisse auf.

Rechenregeln für Erwartungswerte

- Sind X, X_1 und X_2 drei Zufallszahlen und ist a eine Zahl, so gilt:

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$
$$E(a*X) = a* E(X)$$

Problem

- Der Erwartungswert sagt nur, wo Realisationen der Zufallsgröße im Durchschnitt liegen werden.
- Er macht aber keine Aussagen darüber, wie stark die Schwankungen um diesen Durchschnitt sind.
- Dies ist aber für risikoaverse Entscheider eine sehr wichtige Information.

Erster, aber untauglicher Versuch eines Streuungsmaßes

- Die Abweichungen vom Erwartungswert der Größe R sind definitionsgemäß R – E(R).
- Wie groß sind diese Abweichungen also im Durchschnitt?
- Erste Idee: man nimmt den Erwartungswert dieser Abweichungen, also E[R – E(R)], als Streuungsmaß.
- Problem:

$$E[R - E(R)] = E(R) - E(R) = 0$$

Lösung des Problems

- Ein Streuungsmaß, das immer den Wert Null annimmt, ist aber offensichtlich sinnlos.
- Positive und negative Abweichungen vom Erwartungswert heben sich weg.
- Deshalb: man ignoriert das Vorzeichen der Abweichung, d.h. man betrachtet in irgendeiner Form den Absolutbetrag $|R-E(R)|$.

29

Mean Absolute Deviation

- Der Erwartungswert des Betrags der Abweichung („mean absolute deviation") ist ein sinnvolles Streuungsmaß:

  $MAD(R)= E(|R-E(R)|)$
- Im Beispiel:
- $E(|R-E(R)|) = |-3.418 - 0,07|*0.004 + |(-3.159)- 0,07|*0.012+ \ldots +|3.815 - 0,07|*0.008 \approx 0.852$

30

Rechenregeln für „Mean Absolute Deviation"

- Seien X, X_1 und X_2 drei Zufallszahlen und a eine Zahl.
- Vorsicht: im Allgemeinen ist
- $MAD(X_1+X_2) \neq MAD(X_1) +MAD(X_2)$
- sondern lediglich:

  $MAD(X_1+X_2) \leq MAD(X_1) +MAD(X_2)$
- Es gilt:

  $MAD(a*X) = |a|* MAD(X)$

31

Varianz

- Man kann auch den Erwartungswert von $|R-E(R)|^2$ verwenden, die „Varianz":

  $Var(R) = E(|R-E(R)|^2)$
- Beachte: $|R-E(R)|^2 = (R-E(R))^2$, deshalb ist die Variante $Var(R) = E((R-E(R))^2)$ gebräuchlicher.
- Interpretation: Große Abweichungen von E(R) werden durch das Quadrieren stärker gewichtet als bei der „Mean Absolute Deviation".

32

Standardabweichung

- Die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz.

  Std(R) = Wurzel(Var(R))
- Insofern gibt sie uns keine wirklich neue Auskunft im Vergleich zur Varianz.
- Standardabweichungen haben die gleiche Dimension wie R, sind deshalb etwas leichter zu interpretieren.

Beispiel

- Var(R) = = (-3.418 - 0,07)²*0.004 +((-3.159)- 0,07)²*0.012+ …+(3.815 - 0,07)²*0.008 ≈ 1,320
- Std(R) = Var(R)^{0,5} = 1,149

Rechenregeln für Varianz und Standardabweichung (1)

- Seien X, X_1 und X_2 drei Zufallszahlen und a eine Zahl.
- Vorsicht: im Allgemeinen ist
- $Var(X_1+X_2) \neq Var(X_1) + Var(X_2)$
- sondern lediglich:

  $Var(X_1+X_2)$

  $= Var(X_1) + Var(X_2) + 2*Cov(X_1, X_2)$
- Dabei ist $Cov(X_1, X_2)$ die Kovarianz von X_1 und X_2 (dazu später mehr).

Rechenregeln für Varianz und Standardabweichung (2)

- Die Kovarianz kann positive oder negativ sein, deshalb kann die „Gesamtstreuung" von X_1+X_2 größer, gleich oder kleiner als die Summe der Einzelstreuungen sein.
  - Sehr wichtiger Punkt: Diversifikation von Risiken.
- Weiter gelten folgende Regeln:
- Var(a*X) = a²*Var(X)

  Var(X+a) = Var(X), Std(X+a) = Std(X)

  Std(a*X) = |a|*Std(X)

Rechenregeln für Varianz und Standardabweichung (3)

- Zudem gilt der „Verschiebungssatz“:
- $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Im Beispiel:

  $E(R^2) = (-3.418)^2 * 0.004 + (-3.159)^2 * 0.012 + \ldots + (3.815)^2 * 0.008 \approx 1.325$

$E(R^2) - E(R)^2 = 1.325 - 0{,}07^2 \approx 1{,}320 = Var(R)$

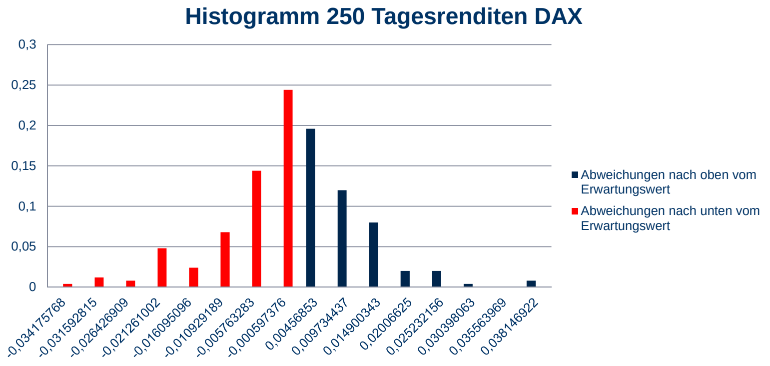
6.2.2 Downside-Risikomaße

6.2.2.1 Lower Partial Moments

Probleme der Streuungsmaße MAD, Varianz, Standardabweichung

- MAD, Varianz und Standardabweichung messen Abweichungen nach oben und nach unten und bewerten diese gleichermaßen.
- Eventuell interessiert man sich aber gerade besonders für besonders schlechte Ergebnisse mit möglicherweise ruinösen Folgen.
- Idee: betrachte nur diejenigen Ausprägungen von R, die unter einem gewissen Referenzwert liegen.
- Häufig wird der Erwartungswert als Referenzwert verwendet.

DAX-Tagesrenditen, Wahrscheinlichkeiten von Realisationen über und unter dem Erwartungswert



Idee – Lower Partial Moments

- Man betrachtet nur die Abweichungen von einem Referenzwert R_{krit} nach unten:
  - Bestimme die Ausprägungen $R_1', \ldots, R_n'$, deren Werte kleiner als R_{krit} sind.
- Das q-te Lower Partial Moment, LPM_q, ist dann für jede natürliche Zahl q (einschließlich Null) definiert als:

LPM_q ,

$= P(R_1')*(R_1' - R_{krit} -)^q + \ldots + P(R_n')*(R_n' - R_{krit})^q$

Beispiel

- In unserem Beispiel sei der Erwartungswert der Referenzwert, d.h. R_{krit} = 0,07
- Es liegen acht Werte unter R_{krit} :

	1	2	3	4	5	6	7	8
R	-3.418	-3.159	-2.643	-2.126	-1.610	-1.093	-0.576	-0.060
P(R)	0.004	0.012	0.008	0.048	0.024	0.068	0.144	0.244

	9	10	11	12	13	14	15	16
R	0.457	0.973	1.490	2.007	2.523	3.040	3.556	3.815
P(R)	0.196	0.12	0.08	0.02	0.02	0.004	0	0.008

LPM_0: Wahrscheinlichkeit der Unterschreitung des Referenzwertes

- Was passiert, wenn man q=0 setzt?
- Beachte, dass für jede beliebige Zahl x gilt: $x^0 = 1$ (insbesondere ist $0^0 = 1$).
- Dann gilt:

LPM_0

$= P(R_1')*(R_1' - R_{krit})^0 + \ldots + P(R_n')*(R_n' - R_{krit})^0$

$= P(R_1')*1 + \ldots + P(R_n')*1$

$= P(\{R_1', \ldots, R_n'\})$

$= P(\{R \leq R_{krit}\})$

LPM_0: Wahrscheinlichkeit der Unterschreitung des Referenzwertes

- Mit anderen Worten: das LPM_0 gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Referenzwert unterschritten wird.

Beispiel

- Das LPM_0 im DAX-Beispiel ist:
- $LPM_0 = 0{,}004 + 0{,}012 + \ldots + 0{,}144 + 0{,}244 = 0{,}552$

LPM_1: Erwartungswert der Unterschreitung des Referenzwertes

- Im Fall q = 1 erhält man den Erwartungswert der Abweichungen vom Referenzwert nach unten:

LPM_1

$= P(R_1')*(R_1' - R_{krit}) + \ldots + P(R_n')*(R_n' - R_{krit})$

$= E(\min(R - R_{krit}, 0))$

- Beachte, dass $\min(R - R_{krit}, 0)$ genau dann negativ ist, wenn $R < R_{krit}$ ist.

Beispiel

LPM_1

$= (-3.418 - 0{,}07)*0.004 + (-3.159 - 0{,}07)*0.012 + \ldots$

$+(-0.060 - 0{,}07)*0.008 \approx -0.426$

LPM_2: Erwartete quadrierte Unterschreitung des Referenzwertes

- Im Fall q = 2 erhält man die erwartete quadrierte Abweichungen vom Referenzwert nach unten:

LPM_2

$= P(R_1')*(R_1' - R_{krit})^2 + \ldots + P(R_n')*(R_n' - R_{krit})^2$

$= E(\min(R - R_{krit}, 0)^2)$

Beispiel

LPM_2

$= (-3.418 - 0{,}07)^2 * 0.004 + (-3.159 - 0{,}07)^2 * 0.012 + \ldots$
$+ (-0.060 - 0{,}07)^2 * 0.008 \approx 0.691$

6.2.2.2 Value-at-Risk

Praktische Bedeutung, Grundidee

- Der „Value-at-Risk“ ist ein insbesondere in der Praxis sehr wichtiges Risikomaß, insbesondere in der Bankenregulierung
- Er ist nichts anderes als ein Quantil zu einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit.

Motivation und Problem

- Idee: intuitiv würde man gerne die Verlustobergrenze kennen, d.h. denjenigen Verlust, der sicherlich nicht überschritten wird.
- Problem: bei vielen Verteilungen kann jeder beliebige Verlust noch übertroffen werden, auch wenn die Wahrscheinlichkeit dafür extrem klein sein kann (Beispiel: Normalverteilung)
- Deshalb lässt sich eine solche Verlustgrenze nicht sinnvoll definieren.

Lösung – Value-at-Risk

- Idee: man gibt sich eine kleine Wahrscheinlichkeit 1-p vor, z.B. 1%, und bestimmt den Verlust, der lediglich mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überschritten wird.
  - p ist dann umgekehrt die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust, der kleiner als der VaR ist.
- Statistisch gesprochen handelt es sich dabei einfach um das p-Quantil der Verlustverteilung.

Bestandteile des VaR

- Der VaR besteht aus folgenden Elementen:
  - Verlustverteilung
  - an einem bestimmten Zeitpunkt
  - zu einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p
  - für einen festes Zeitintervall (z.B. ein Tag, eine Woche)

Value-at-Risk –Definition

- Der VaR zu einem bestimmten Zeitpunkt ist dann der kleinste Verlust, der lediglich mit der Wahrscheinlichkeit <u>von höchstens</u> (1-p) innerhalb des vorgegebenen Zeitintervalls überschritten wird.
- <u>Bei stetig verteilter Zufallsvariable</u>: der VaR zu einem bestimmten Zeitpunkt ist derjenige Verlust, der lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von (1-p) innerhalb des vorgegebenen Zeitintervalls überschritten wird.

Value-at-Risk –mathematische Definition

- Sei V eine Zufallsvariable mit Werten in Werte(V) (z.B. die reellen Zahlen)
- VaR(p) = inf{v e Werte(V): P({V≥v})≤1-p}

Beispiel

- Wir nehmen wieder das DAX-Beispiel. Es sei unterstellt, dass wir ein DAX-Portfolio im Wert von 1000 GE besitzen.
- Die Sicherheitswahrscheinlichkeit betrage p = 95 %

Erster Schritt: Konkretisierung des Verlusts

- Ein Verlust soll dann vorliegen, wenn der Portfoliowert in t+1 geringer ist als in t:
- Verlust = -{Portfoliowert(t+1) – Portfoliowert(t)}
- Weiter gilt:
- Portfoliowert(t+1) = Portfoliowert(t)*(1+R_{DAX})
- Somit:

  Verlust = - R_{DAX} *1.000

Zweiter Schritt: Bestimmung der Verlustverteilung

- V: Verlust (negativer Verlust = Gewinn)
- P(V): Wahrscheinlichkeit von Verlust V

	1	2	3	4	5	6	7	8
R	-3.418	-3.159	-2.643	-2.126	-1.610	-1.093	-0.576	-0.060
V	34.18	31.59	26.43	21.26	16.10	10.93	5.76	0.60
P(V)	0.004	0.012	0.008	0.048	0.024	0.068	0.144	0.244

	9	10	11	12	13	14	15	16
R	0.457	0.973	1.490	2.007	2.523	3.040	3.556	3.815
V	-4.57	-9.73	-14.90	-20.07	-25.23	-30.40	-35.56	-38.15
P(V)	0.196	0.12	0.08	0.02	0.02	0.004	0	0.008

Dritter Schritt: Bestimmung des Value-at-Risk

- F(v) =P({V≤v}): Verlustverteilungsfunktion
- 1-F(v): W'keit, dass ein Verlust von mehr als v resultiert.

v	-38.147	-35.564	-30.398	-25.232	-20.066	-14.900	-9.734	-4.569
P(v)	0.008	0.000	0.004	0.020	0.020	0.080	0.120	0.196
F(v)	0.008	0.008	0.012	0.032	0.052	0.132	0.252	0.448
1-F(v)	0.992	0.992	0.988	0.968	0.948	0.868	0.748	0.552
v	0.597	5.763	10.929	16.095	21.261	26.427	31.593	34.176
P(v)	0.244	0.144	0.068	0.024	0.048	0.008	0.012	0.004
F(v)	0.692	0.836	0.904	0.928	0.976	0.984	0.996	1.000
1-F(v)	0.308	0.164	0.096	0.072	0.024	0.016	0.004	0

61

Beispiel: Ergebnis

- Der Value-at-Risk beträgt also 21,261 Geldeinheiten bei einem Vermögen von 1000 GE, einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 5% und einer Haltedauer von einem Handelstag.

62

Praktisches Problem: woher nimmt man die Verlustwahrscheinlichkeit?

- Wenn man die Verlustverteilung kennt, dann ist die Bestimmung des VaR ziemlich einfach.
- Es gibt verschiedene Modelle zur Bestimmung der Verlustverteilung:
  - Normalverteilungsansatz
  - Historische Simulation
  - Monte Carlo-Simulation
  - Extremwerttheorie
  - …

63

Problem: Modell- und Schätzrisiko

- Die Value-at-Risk Prognose ist nur dann gut, wenn das Wahrscheinlichkeitsmodell auch passt.
  - Beispiel: Ein auf normalverteilten Daten basierender Ansatz wird nicht funktionieren, wenn die Verteilung des Verlusts stark von einer Normalverteilung abweicht.
- Verteilungsparameter müssen in der Vergangenheit geschätzt werden.
  - Wählt man ein zu langes Schätzfenster, so gehen veraltete Daten in die VaR-Prognose ein.
  - Wählt man ein zu kurzes Schätzfenster, so können Parameter nicht verlässlich geschätzt werden und reagieren zu sehr auf Ausreißer.

64

6.2.2.2.1 Value-at-Risk bei normalverteiltem Vermögen

Voraussetzung: normalverteiltes Vermögen

- Gegeben sei ein Vermögen W(t+1), das aus Sicht von t normalverteilt ist.
  - z.B. der Wert eines Portfolios
- $W(t+1) \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$
  - dabei sei $E(W(t+1)) = \mu_W$ der Erwartungswert des Vermögens.
  - dabei sei $Var(W(t+1)) = \sigma_W^2$ die Varianz des Vermögens.

Voraussetzung: Sicherheitswahrscheinlichkeit p

- Gegeben sei eine Wahrscheinlichkeit p, so dass der Value-at-Risk lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von (1-p) überschritten wird.

Schritt 1: Festlegung des Verlustkonzepts

- Es gibt mehrere Möglichkeiten zu definieren, was einen Verlust darstellt:
  - Möglichkeit 1: Verlust als Unterschreitung des Vermögens im Zeitpunkt t, W(t).
  - Möglichkeit 2: Verlust als Unterschreitung des Erwartungswerts des Vermögens im Zeitpunkt t+1, E(W(t+1)).
- Allgemein:

$$\text{Verlust} = \text{Ref} - W(t+1)$$

, wobei Ref ein Referenzwert ist.

Schritt 2: Bestimmung der Verlustverteilung

- Da der Referenzwert (Ref) eine sichere Größe ist, ist der Verlust selbst wieder normalverteilt:

  $E(V(t+1)) = \text{Ref} - \mu_W$

  $Var(V(t+1)) = \sigma_W^2$

- $V(t+1) \sim N(\text{Ref} - \mu_W, \sigma_W^2)$

Schritt 3 – Bestimmung des Quantils einer normalverteilten Größe

- Die Quantile der Standardnormalveteilung kann man direkt aus einer Tabelle ablesen.
  - Gegebenenfalls muss man dabei auf die Symmetrie der Standardnormalverteilung zurückgreifen, d.h

$$\Phi_{0,1}{}^{-1}(p) = -\Phi_{0,1}{}^{-1}(1-p)$$

- Einige Beispiele für Quantile der Standardnormalverteilung:

$$\Phi_{0,1}{}^{-1}(0{,}05) \approx -1{,}64485$$

$$\Phi_{0,1}{}^{-1}(0{,}5) = 0$$

$$\Phi_{0,1}{}^{-1}(0{,}35) = -0{,}38532$$

Schritt 3 – Bestimmung des Quantils einer normalverteilten Größe

- Problem: wir benötigen das Quantil einer Zufallsvariablen, die zwar normalverteilt, aber nicht notwendigerweise standardnormalverteilt ist.
- Lösung: hat man eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, so lassen sich deren Quantile ganz leicht über die Quantile der Standardnormalverteilung ausdrücken:
- Es gilt konkret:

$$\Phi_{\mu,\sigma}{}^{-1}(p) = \mu + \sigma \cdot \Phi_{0,1}{}^{-1}(p)$$

- Verbal: Man streckt das p-Quantil der Standardnormalverteilung um den Faktor σ (Standardabweichung) und addiert μ (Erwartungswert) hinzu.

Schritt 4 – Anwendung der Quantilsformel auf den Value-at-Risk

- Hier wird konkret das p-Quantil der Verlustverteilung gesucht
  - Zur Erinnerung:
    - p: W'keit, dass der VaR nicht überschritten wird
    - (1-p): W'keit, dass der VaR überschritten wird
- Konkretisierung der Parameter:

  $\mu = \text{Ref} - \mu_W$ = Erwartungswert Verlust

  $\sigma = \sigma_W$ = Standardabweichung Verlust

- Somit erhält man für den Value-at-Risk:

$$VaR = \text{Ref} - \mu_W + \sigma_W \cdot \Phi_{0,1}{}^{-1}(p)$$

Beispiel (Aufgabe 4.3 aus der Aufgabensammlung zur Vorlesung)

- Gegeben ist ein Wertpapier mit normalverteilter Zahlung mit $\mu = 113{,}5$ und Varianz $\sigma^2 = 62{,}75$
- Gegeben ist die Sicherheitswahrscheinlichkeit p = 13/20=0,65.
- Der Referenzwert ist der Erwartungswert des Papiers.

Lösung

- Bestimme das Quantil $F_{0,1}^{-1}(p)$:

  $F_{0,1}^{-1}(13/20) = 0{,}385$
- Einsetzen in die Formel:

  $Var = Ref - \mu_W + \sigma_W * F_{0,1}^{-1}(p)$

  = 113,5 - 113,5

  + Wurzel(62,75)* 0,385

  = Wurzel(62,75)* 0,385

  = 3,04977

Alternative Value-at-Risk-Definition: verschobene Vermögensverteilung

- Bisher: Value-at-Risk wurde als <u>Verlust</u> definiert, der nur mit einer kleinen Restwahrscheinlichkeit <u>überschritten</u> wird.
- Alternative Definition: Value-at-Risk als ein Vermögen, das nur mit einer kleinen Restwahrscheinlichkeit <u>unterschritten</u> wird.

Definition: verschobene Vermögensverteilung

- Die verschobene Vermögensverteilung ist das Vermögen, das einen Referenzwert überschreitet:

  $$W^{t+1^v} = W^{t+1} - Ref$$
- Dann sind Erwartungswert und Standardabweichung von W^{t+1^v}:

  $$\mathrm{E}\left(W^{t+1^v}\right) = \mu_W - Ref$$

  $$\mathrm{Stdabw}\left(W^{t+1^v}\right) = \sigma_W$$

Umsetzung anhand der Quantilsformel

- Es sei 1-p die W‘keit, dass das Vermögen den VaR (in der Definition als Vermögen) unterschreitet.
- Dann gilt nach der Quantilsformel:

$$VaR^{Vermögen} = \mu_W - \mathrm{Ref} + \sigma_W \cdot {\Phi_{0,1}}^{-1}(1-p)$$

Zusammenhang zwischen den VaR-Werten in den Defintionen als Verlust bzw. Vermögen

- Verwende weiter die Symmetrie der Standardnormalverteilung:

$${\Phi_{0,1}}^{-1}(1-p) = -{\Phi_{0,1}}^{-1}(p)$$

- Damit erhält man:

$$VaR^{Vermögen} = \mu_W - \mathrm{Ref} - \sigma_W \cdot {\Phi_{0,1}}^{-1}(p) = -VaR^{Verlust}$$

Zusammenhang zwischen den VaR-Werten in den Defintionen als Verlust bzw. Vermögen

- Verbal: verwendet man in den VaR-Definitionen über das Vermögen bzw. den Verlust (i) denselben Referenzwert und (ii) dieselbe Wahrscheinlichkeit 1-p für eine Überschreitung des Verlusts bzw. Unterschreitung des Vermögens, so unterscheiden sich die Werte nur im Vorzeichen.

6.2.2.2.1 Value-at-Risk bei diskreter Vermögensverteilung

Voraussetzung: diskret verteiltes Vermögen

- Gegeben sei ein Vermögen W(t+1), das aus Sicht von Zeitpunkt t eine endliche Zahl (n) von verschiedenen Werten annehmen kann:

  $w_1 > w_2 > \ldots > w_n$

- Die Wahrscheinlichkeiten seien:

  $p_1 = P(\{W(t+1)= w_1\})$

  ,…,

  $p_n = P(\{W(t+1)= w_n\})$

Voraussetzung: Sicherheitswahrscheinlichkeit p

- Gegeben sei eine Wahrscheinlichkeit p, so dass der Value-at-Risk lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von (1-p) überschritten wird.

Schritt 1: Festlegung des Verlustkonzepts

- Der Verlust ist wieder die Abweichung nach unten von einem Referenzwert:

  Verlust = Ref - W(t+1)

Schritt 2: Bestimmung der Verlustverteilung (1)

- Einsetzen der n Werte für W(t+1) in die Verlustdefinition ergibt n Werte für den Verlust V:

  $v_1 = \text{Ref} - w_1$

  …

  $v_n = \text{Ref} - w_n$

- Dabei ist $p_1 = P(\{V= v_1\})$, … , $p_n = P(\{V= v_n\})$

Schritt 2: Bestimmung der Verlustverteilung (2)

- Ordne die Verluste aufsteigend an.
  - Wenn w_1 das größte Vermögen ist, dann ist v_1 = Ref - w_1 der kleinste Verlust,
  - …
  - Wenn w_n das kleinste Vermögen ist, dann ist v_n = Ref - w_n der größte Verlust.
- Bestimme die Verteilungsfunktion der Verluste, F(v).
- Bestimme die Überschreitungswahrscheinlichkeit, 1-F(v).

Schritt 3: Bestimmung des Value-at-Risk

- Bestimme all diejenigen Verluste, welche nur mit einer Wahrscheinlichkeit von nicht mehr als 1-p überschritten werden.
- Der kleinste dieser Verluste, die nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 1-p überschritten werden, ist dann der Value-at-Risk.

Beispiel (Übungsaufgabe)

6.2.2.2 Conditional Value-at-Risk

Motivation

- Der Value-at-Risk gibt uns zwar an, welcher Verlust nur mit einer kleinen Restwahrscheinlichkeit (z.B. 1%) überschritten wird.
- Er macht aber keine Angabe darüber, wie hoch diese Überschreitungen sind.

89

Motivation - Beispiel

- Bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 1 % und einer aus Aktien bestehenden Position ist bei 250 Handelstagen im Jahr die Wahrscheinlichkeit einer Überschreitung sehr groß.
- Dann ist es aber wichtig zu wissen, ob diese Überschreitungen nur gering über dem VaR liegen oder vielleicht ruinöse Folgen haben.

90

Problem

- Wie hoch ist die durchschnittliche Überschreitung des VaR?

91

Formalisierung

- Man bestimmt den bedingten Erwartungswert der Verluste, die über dem VaR liegen.

$$CVaR = E(V|V>VaR)$$

92

CVaR bei diskreter Wahrscheinlichkeit

- Zur Vereinfachung betrachten wir nur den Fall mit einer diskreten Verteilung.
  - Man kann den CVaR auch für die Normalverteilung bestimmen. Die Herleitung der Formel ist aber kompliziert.

Vorgehensweise bei der Berechnung des CVaR

- Schritt 1: bestimme die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Verluste
  - Die Bedingung ist dabei, dass ein Verlust eingetreten ist, der den VaR überschreitet.
- Schritt 2: bestimme den Erwartungswert der Verluste unter der bedingten Verlustverteilung.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten (1)

- Es sei v ein vorgegebener Verlust. Dessen Wahrscheinlichkeit, bedingt unter der Information, dass ein Verlust eingetreten ist, lautet

$$P(\{V=v\}|V>VaR)$$
$$= P(\{V=v\}\cap\{V>VaR\})/P(\{V>VaR\})$$

- Nenner: Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Verluste, die den VaR überschreiten.
- Zähler: hier benötigt man eine Fallunterscheidung.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten (2)

- Fall 1: $v \leq VaR$.

$$P(\{V=v\}|V>VaR)$$
$$= P(\{V=v\}\cap\{V>VaR\})/ P(\{V>VaR\})$$
$$= 0$$

- Fall 2: $v > VaR$.

$$P(\{V=v\}|V>VaR)$$
$$= P(\{V=v\}\cap\{V>VaR\})/P(\{V>VaR\})$$
$$= P((\{V=v\}) / P(\{V>VaR\})$$

Beispiel (Fortsetzung)

- F(v) =P({V≤v}): Verlustverteilungsfunktion
- 1-F(v): W'keit, dass ein Verlust von mehr als v resultiert.

v	-38.147	-35.564	-30.398	-25.232	-20.066	-14.900	-9.734	-4.569
P(v)	0.008	0.000	0.004	0.020	0.020	0.080	0.120	0.196
F(v)	0.008	0.008	0.012	0.032	0.052	0.132	0.252	0.448
1-F(v)	0.992	0.992	0.988	0.968	0.948	0.868	0.748	0.552
v	0.597	5.763	10.929	16.095	21.261	26.427	31.593	34.176
P(v)	0.244	0.144	0.068	0.024	0.048	0.008	0.012	0.004
F(v)	0.692	0.836	0.904	0.928	0.976	0.984	0.996	1.000
1-F(v)	0.308	0.164	0.096	0.072	0.024	0.016	0.004	0

97

Praktische Bestimmung der bedingten Wahrscheinlichkeiten

- Man nimmt alle Verluste, die über dem VaR liegen.
- Man dividiert ihre Wahrscheinlichkeiten jeweils durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Verluste, die über dem VaR liegen.

98

Beispiel (Fortsetzung)

- Der VaR wurde im Beispiel als 21,261 (1-p = 5%) ermittelt.
- Überschreitungen des Value-at-Risk stellen die folgenden Verluste dar:

  26,427, 31,593 und 34,176
- P({V>VaR})

  = P(({V= 26,427}) + P(({V= 31,593 }) + P(({V= 34,176})

  = 0,008 + 0,012 + 0,004 = 0,024

99

Beispiel (Fortsetzung)

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten dieser Verluste (alle anderen Verluste haben eine bedingte Wahrscheinlichkeit von 0):
- P({V= 26,427}|{V>VaR}) = 0,008/0,024 = 1/3
- P({V= 31,593}|{V>VaR}) = 0,012/0,024 = 1/2
- P({V= 34,176}|{V>VaR}) = 0,004/0,024 = 1/6

100

Beispiel

- Bestimme nun den CVaR als den Erwartungswert der Überschreitungen, basierend auf den eben ermittelten bedingten Wahrscheinlichkeiten:
- CVaR

  = 1/3* 26,427 + 1/2* 31,593 + 1/6* 34,176
  = 30,3015

Beispiel (Übungsaufgabe)

6.3 Risikoverbundeffekte von Korrelationen

Ausgangspunkt

- Die Varianz der Summe zweier Zufallsgrößen ist nicht die Summe ihrer Varianzen:
- $Var(X_1+X_2) = Var(X_1)+Var(X_2)+2*cov(X_1, X_2)$

Kovarianz - Definition

- Die Kovarianz ist dabei definiert als:

  $cov(X_1, X_2) = E([X_1-E(X_1)]*[X_2 -E(X_2)])$
- Es gilt der Verschiebungssatz:

  $cov(X_1, X_2) = E(X_1*X_2) - E(X_1)*E(X_2)$
- Im Fall $X_1 = X_2$ ist die Kovarianz einfach die Varianz von X_1.

105

Kovarianz - Rechenregeln

- Es gelten (X, X_1 und X_2 sind Zufallsvariablen, a ist eine Zahl):

  $cov(X_1, X_2) = cov(X_2, X_1)$

  $cov(X, X_1+X_2) = cov(X, X_1) + cov(X, X_2)$

  $cov(X_1, X_2 + a) = cov(X_1, X_2)$

  $cov(a*X_1, X_2) = a* cov(X_1, X_2)$

106

Der Korrelationskoeffizient

- Der Korrelationskoeffizient von X_1 und X_2 ist die Kovarianz der auf eine Varianz von 1 normierten Größen $X_1/Std(X_1)$ und $X_2/Std(X_2)$

  $Corr(X_1,X_2) = Cov(X_1,X_2)/(Std(X_1)*Std(X_2))$
- Dieser Wert liegt immer zwischen -1 und +1 und ist deshalb einfacher zu interpretieren als die Kovarianz.

107

Anwendung

- Es seien Z_1 und Z_2 die (risikobehafteten) Zahlungen zweier Wertpapiere im Zeitpunkt t+1.
- Die Stückzahlen der beiden Papiere seien N1 und N2.
- Dann sind die Gesamtzahlungen dieses Portfolios $N_1* Z_1 + N_2* Z_2$
- Wie hoch ist dann die Varianz als Risikomaß für die stochastischen Portfoliozahlungen?

108

Bestimmung der Portfoliovarianz

- $Var(N_1 * Z_1 + N_2 * Z_2)$

$= Var(N_1 * Z_1) + Var(N_2 * Z_2) + 2 * cov(N_1 * Z_1, N_2 * Z_2)$

$= N_1^2 * Var(Z_1) + N_2^2 * Var(Z_2)$

$+ 2 * N_1 * N_2 * cov(Z_1, Z_2)$

109

Idee: Portfoliodiversifikation

- Gegeben sei ein zu investierendes Vermögen.
- Dann fährt man üblicherweise besser, wenn man das Vermögen über mehrere Papiere streut als wenn man alles in ein Papier investieren würde.

110

Beispiel

- Gegeben seien zwei Wertpapiere mit einem Preis von jeweils 100 Geldeinheiten.
- 1000 Geldeinheiten sollen investiert werden.
- Es gebe drei Zustände:

	Zustand 1 (p=0,25)	Zustand 2 (p=0,5)	Zustand 3 (p=0,25)
Z_1	102	108	110
Z_2	103	105	102

111

Bestimmung der Varianzen der einzelnen Papiere

- Papier 1:

$E(Z_1) = 0,25*102 + 0,5*108 + 0,25*110 = 107$

$Var(Z_1) = 0,25*[102 - 107]^2 + 0,5*[108 - 107]^2$

$+ 0,25*[110 - 107]^2 = 9$

- Papier 2:

$E(Z_2) = 0,25*103 + 0,5*105 + 0,25*102 = 103,75$

$Var(Z_2) = 0,25*[103 - 103,75]^2 + 0,5*[105 - 103,75]^2$

$+ 0,25*[102 – 103,75]^2 = 1,6875$

112

Bestimmung der Kovarianz beider Papiere

- $Cov(Z_1, Z_2)$

  $= 0{,}25*[102-107]*[103-103{,}75]$

  $+ 0{,}5*[108-107]*[105-103{,}75]$

  $+ 0{,}25*[110-107]*[102-103{,}75]$

  $= 0{,}25$

113

Bestimmung des Korrelationskoeffizienten

- $Corr(Z_1, Z_2)$

  $= 0{,}25/(\text{Wurzel}(9)*\text{Wurzel}(1{,}6875)) \approx 0{,}0642$

114

Variante 1: Investition des gesamten Vermögens in das Papier mit der niedrigeren Varianz

- Papier 2 hat die niedrigere Varianz

  $Var(Z_2)=1{,}6875 < Var(Z_1)=9$

- Man erhält 10 Stück von Papier 2 (zu investierendes Vermögen: 1000 GE, Preis = 100)
- $Var(10*Z_2) = 10^2* Var(Z_2) = 10^2*1{,}6875 = 168{,}75$

115

Variante 2: Streuung der Investition

- Alternativ: investiere in beide Papiere:
- Kaufe z.B. 2 Stück von Papier 1 (obwohl dies eine höhere Varianz als Papier 2 aufweist) und 8 Stück von Papier 2:

$$Var(2*Z_1+8*Z_2) = 2^2*Var(Z_1)+8^2*Var(Z_2) +2*2*8*cov(Z_1, Z_2) = 152$$

116

Ergebnis

- Obwohl Papier 2 die niedrigere Varianz hat als Papier 1, so ist eine komplette Investition in Papier 2 dennoch riskanter (Varianz = 168,75) als eine Investition, bei der 1/5 des Vermögens in das Papier mit der höheren Varianz und 4/5 in das Papier mit der niedrigeren Varianz investiert werden (Gesamtvarianz = 152).