

Kapitel 3 – klassische Investitionsrechnung

Problemstellung – worum geht es in diesem Kapitel?

- Mit dem Kapitalwert haben wir ein sinnvolles Verfahren zur Beurteilung von Investitionsobjekten kennengelernt.
- Es gibt darüberhinaus eine Reihe „klassischer“ Verfahren.
- Diese sind zwar nur unter restriktiven Bedingungen anwendbar oder gleich völlig sinnlos, man sollte sie aber trotzdem kennen.

Klassische Investitionsrechnung

- Verfahren der klassischen Investitionsrechnung:
 1. Auf einer so genannten „flachen Zinsstruktur“ basierende Verfahren
 - Klassischer Kapitalwert
 - Klassischer Endwert
 - Klassische Annuität
 2. Eher unsinnige Verfahren
 - Der interne Zinsfuß/Zinssatz
 - Die Pay-Off-Periode

Kapitel 3, erster Teil

Auf einer flachen
Zinsstruktur basierende
Verfahren

Allgemeine Formeln für Barwert und Kapitalwert

- Die allgemeine Formel für den Barwert lautet:

$$BW = Z_1/(1+i_1) + Z_2/(1+i_2)^2 + \dots + Z_T/(1+i_T)^T$$

- Die allgemeine Formel für den Kapitalwert lautet:

$$KW = Z_1/(1+i_1) + Z_2/(1+i_2)^2 + \dots + Z_T/(1+i_T)^T - A_0$$

- Beide Formeln sind abhängig von den (üblicherweise verschiedenen) Zinssätzen i_1, i_2, \dots, i_T .

Spezialfall: flache Zinsstruktur

- Von einer „flachen Zinsstruktur“ spricht man, wenn die Zinssätze i_1, i_2, \dots, i_T alle identisch sind:

$$i_1 = i_2 = \dots = i_T = i$$

- Vorteil:
 - Man kann leichter rechnen und erhält einige schöne Formeln.
- Nachteil:
 - Eine flache Zinsstruktur kommt in der Realität selten vor, so dass die Formeln wenig nützlich sind.

Klassischer Barwert

- Klassischer Barwert beim Zins i :

$$BW(i) = Z_1/(1+i) + Z_2/(1+i)^2 + \dots + Z_T/(1+i)^T$$

Klassischer Kapitalwert

- Klassischer Kapitalwert beim Zins i :

$$KW(i) = -A_0 + Z_1/(1+i) + Z_2/(1+i)^2 + \dots + Z_T/(1+i)^T$$

Klassischer Kapitalwert als Entscheidungskriterium

- Bei mehreren konkurrierenden Investitionsobjekten:
 - Wähle das IO mit dem höchsten positiven Kapitalwert.
- Bei mehreren kombinierbaren Investitionsobjekten:
 - Führe alle IOs mit positivem Kapitalwert durch.

Aufgabe

- (Aufgabensammlung)

Der klassische Endwert (1)

- Beim (klassischen) Kapitalwert wird ein IO in $t=0$ mit der festverzinslichen Anlage/Kreditaufnahme verglichen.
- Der (klassische) Endwert vergleicht ein IO in $t=T$ mit der festverzinslichen Anlage/Kreditaufnahme.
- Idee:
 - Finanziere die Anfangsauszahlung A_0 über einen Kredit, der in $t=T$ fällig wird.
 - Lege alle Zahlungen Z_t bis zum Zeitpunkt T an.

Der klassische Endwert (2)

- Ergebnis in T:
 - Rückzahlung des Kredits:
 $-A_0 \cdot (1+i)^T$
 - Aus der Anlage der Zahlungen Z_t erhält man in T:
 $+Z_1 \cdot (1+i)^{T-1}$
 $+Z_2 \cdot (1+i)^{T-2}$
...
 $+Z_{T-1} \cdot (1+i)$
 $+Z_T$

Der klassische Endwert (3)

- Gesamtergebnis in T:

$$EW(i)$$

$$= -A_0 \cdot (1+i)^T + Z_1 \cdot (1+i)^{T-1} + Z_2 \cdot (1+i)^{T-2} + \dots + Z_{T-1} \cdot (1+i) + Z_T$$

- In den Zeitpunkten $t=0, t=1, \dots, t=T-1$ hat man per Saldo jeweils genau eine Zahlung von Null.
- Im Zeitpunkt T erhält man den „Endwert“ als Saldo.

Graphik: Kapitalwert vs. Endwert



Entnahme **KW**:

Δ_{KW} 0 0 ... 0 0

Entnahme **EW**:

0 0 0 ... 0 Δ_{EW}

Der klassische Endwert als Entscheidungskriterium

- Ein einzelnes IO ist dann vorteilhaft, wenn es einen positiven Endwert hat.
- Bei konkurrierenden IOs wird das IO mit dem höchsten positiven Endwert gewählt.
- Bei kombinierbaren IOs werden alle Objekte mit positivem Endwert gewählt.

Aufgabe

- (Aufgabensammlung)

Klassischer Kapitalwert und klassischer Endwert

- Durch Ausklammern erkennt man:

$$\begin{aligned} & \text{EW}(i) \\ &= -A_0 \cdot (1+i)^T + Z_1 \cdot (1+i)^{T-1} + Z_2 \cdot (1+i)^{T-2} + \dots + Z_{T-1} \cdot (1+i) + Z_T \\ &= (1+i)^T \cdot \{-A_0 + Z_1/(1+i) + Z_2/(1+i)^2 \dots + Z_T/(1+i)^T\} \\ &= (1+i)^T \cdot \text{KW}(i) \end{aligned}$$

- Kurz:

$$\text{EW}(i) = (1+i)^T \cdot \text{KW}(i)$$

Aufgabe

- (Aufgabensammlung)

Konsequenz: Äquivalenz von klassischem Kapital- und Endwert

- Da Zinsen niemals negativ sind, ist $(1+i)^T > 0$.
- Somit gilt für zwei Investitionsobjekte IO_1 und IO_2 stets:

$$KW(IO_1, i) > KW(IO_2, i)$$



$$EW(IO_1, i) > EW(IO_2, i)$$

- Die beiden Beurteilungskriterien sind also äquivalent und führen zu den gleichen Entscheidungen.

Bar- und Endwerte von Zahlungsströmen mit konstanten Zahlungen

- Gegeben sei eine Zahlungsreihe mit:

$$Z_t = Z, t=1, \dots, T$$

- Verbal: in den Zeitpunkten $t=1$ bis $t=T$ sind die Zahlungen jeweils gleich hoch.
- Weiterhin gelte auch:

$$i_t = i, t=1, \dots, T$$

- Wie lassen sich Bar- und Endwert einer solchen Zahlungsreihe berechnen?

Barwert bei gleich hohen Zahlungen: $Z_t = Z, t=1, \dots, T$

- Es gilt dann:

$$BW(i) = Z_1/(1+i) + Z_2/(1+i)^2 + \dots + Z_T/(1+i)^T$$

$$= Z/(1+i) + Z/(1+i)^2 + \dots + Z/(1+i)^T$$

$$= Z \cdot \{1/(1+i) + 1/(1+i)^2 + \dots + 1/(1+i)^T\}$$

$$= Z \cdot RBWF(i, T)$$

Definition: „Rentenbarwertfaktor“:

$$RBWF(i, T)$$

$$:= \{1/(1+i) + 1/(1+i)^2 + \dots + 1/(1+i)^T\}$$

Endwert bei gleich hohen Zahlungen: $Z_t = Z, t=1, \dots, T$

- Es gilt dann:

$$EW(i)$$

$$= Z_1^*(1+i)^{T-1} + Z_2^*(1+i)^{T-2} + \dots + Z_{T-1}^*(1+i)^1 + Z_T$$

$$= Z^*(1+i)^{T-1} + Z^*(1+i)^{T-2} + \dots + Z^*(1+i)^1 + Z$$

$$= Z^*\{(1+i)^{T-1} + (1+i)^{T-2} + \dots + (1+i)^1 + 1\}$$

$$= Z^*REWF(i, T)$$

Definition: „Rentenendwertfaktor“:

$$REWF(i, T)$$

$$:= (1+i)^{T-1} + (1+i)^{T-2} + \dots + (1+i)^1 + 1$$

Rentenendwertfaktor und Rentenbarwertfaktor – kompaktere Darstellung

- Es gilt:

$$RBWF(i, T) = \frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \cdot i}$$

$$REWF(i, T) = \frac{(1+i)^T - 1}{i}$$

- Also gilt auch:

$$RBWF(i, T) \cdot (1+i)^T = REWF(i, T)$$

Einschub – eine nützliche Formel, Herleitung von REWF und RBWF (1)

- **Anfang:** nicht klausurrelevanter Abschnitt (Herleitung der Formeln)

- Es gilt:

$$1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1} = (1-q^n)/(1-q)$$

- Herleitung:

$$\begin{aligned} S(q,n-1) &:= 1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1} \\ &= 1+q\{1+q+q^2+\dots+q^{n-2}\} \\ &= 1+q\{1+q+q^2+\dots+q^{n-2}+q^{n-1}\} - q^n \\ &= 1+qS(q,n-1) - q^n \end{aligned}$$

Einschub – eine nützliche Formel, Herleitung von REWF und RBWF (2)

- Kurz:

$$S(q,n-1) = 1 + q * S(q,n-1) - q^n$$

- Auflösen nach $S(q,n-1)$:

$$S(q,n-1) = \{1 - q^n\} / (1 - q)$$

- Dies liefert die behauptete Gleichung.

Einschub – eine nützliche Formel, Herleitung von REWF und RBWF (3)

- Es gilt:

$$\text{REWF}(i, T)$$

$$= (1+i)^{T-1} + (1+i)^{T-2} + \dots + (1+i)^0 + 1$$

$$= q^{T-1} + q^{T-2} + \dots + q + 1$$

$$= S(q, T-1)$$

- Mit:

$$q = (1+i)$$

Einschub – eine nützliche Formel, Herleitung von REWF und RBWF (3)

- Somit folgt:

$$\begin{aligned} \text{REWF}(i,T) &= S(1+i,T-1) \\ &= \{1 - (1+i)^n\}/(1-(1+i)) \\ &= \{ (1+i)^n - 1\}/i \end{aligned}$$

- Den RBWF kann man mit $q=1/(1+i)$ ebenfalls leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \text{RBWF}(i,T) \\ := \{q + q^2 + \dots + q^T\} &= q \cdot S(q,T-1) \end{aligned}$$

Einschub – eine nützliche Formel, Herleitung von REWF und RBWF (4)

- Den RBWF kann man mit $q=1/(1+i)$ ebenfalls leicht berechnen:

$$\text{RBWF}(i,T)$$

$$:= \{q + q^2 + \dots + q^T\} = q \cdot S(q, T-1)$$

- (Nach einigen einfachen Umformungen erhält man die behauptete Formel für den RBWF.)
- **Ende nicht klausurrelevanter Abschnitt.**

Zwischenfazit: Bar- und Endwerte im Fall $Z_t=Z, t=1,\dots,T$

- Merke:

$$BW(i,T,Z) = Z \cdot RBWF(i,T)$$

$$EW(i,T,Z) = Z \cdot REWF(i,T)$$

- (Man beachte: Zahlungen fallen dabei nur von $t=1$ bis $t=T$ an. Zahlungen in $t=0$ sind in diesen Formeln nicht berücksichtigt)

Aufgabe

- (Aufgabensammlung)

Die klassische Annuitäten

Definition - Annuität

- Eine Annuität ist ein Zahlungsstrom mit konstanten Zahlungen Z in $t=1, \dots, T$.

$t=1$	$t=2$...	$t=T$
$+Z$	$+Z$...	$+Z$

Annuitätenmethode und Kapitalwert

- Der Kapitalwert kann interpretiert werden als der Betrag, den man in $t=0$ entnehmen kann (finanziert durch das IO).
- Bei der Annuität entnimmt man einen konstanten Betrag in $t=1, \dots, T$.

	Entnahme $t=0$	Entnahme $t=1$	Entnahme $t=2$	Entnahme $t=3$
KW	+291,80	0	0	0
Annuität	0	+107,21	+107,21	+107,21

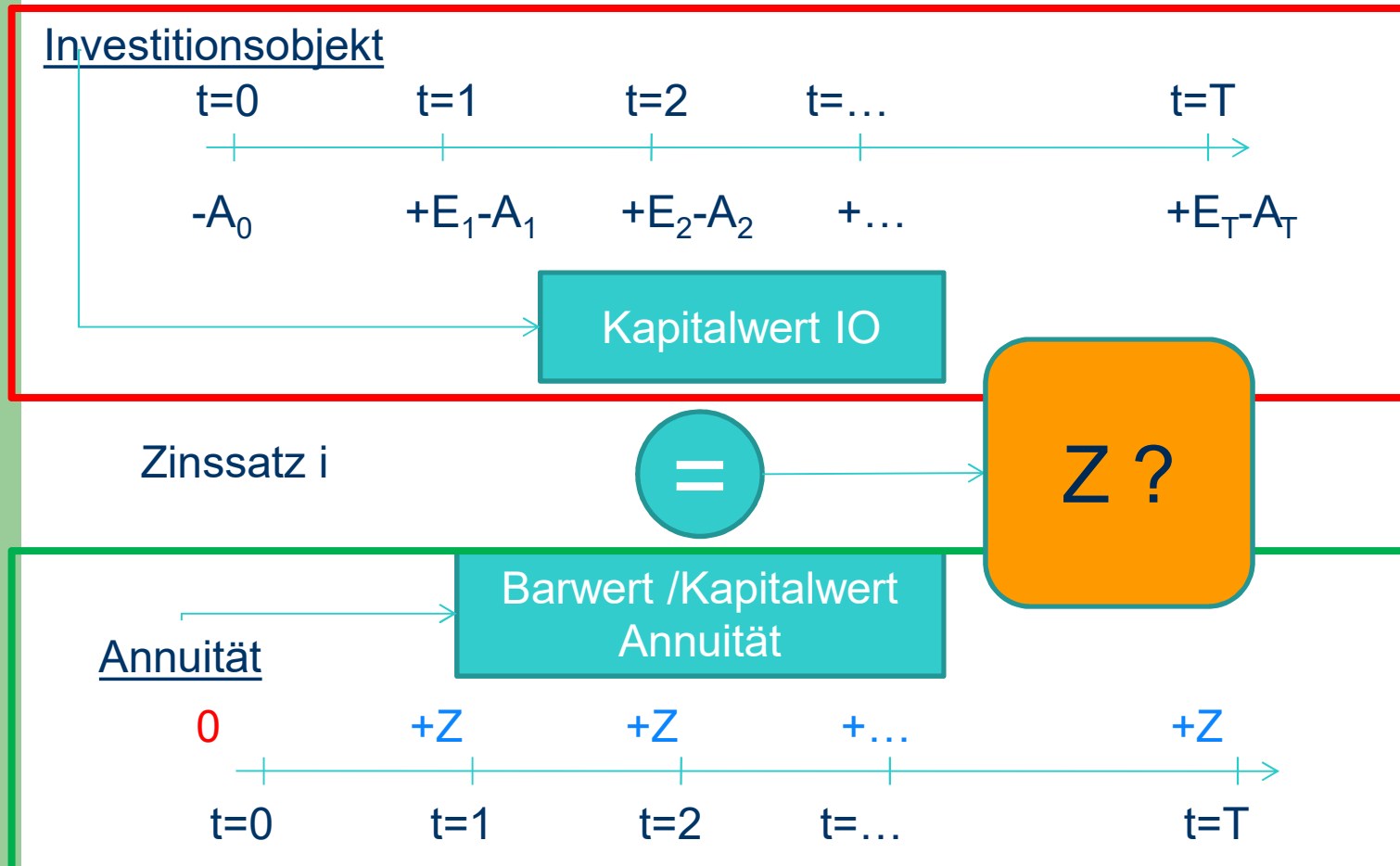
Grundidee

- Gegeben seien
 - Zwei prinzipiell beliebige, konkurrierende IOs.
 - der Zinssatz i .
- Idee:
 - Rechne die IOs um in Annuitäten...
 - ... mit gleicher Laufzeit...
 - ... und Anfangszahlung $A_0 = 0$.
 - Wähle das IO mit der höchsten Annuitätenzahlung Z !

Vorgehensweise (1)

- Wir kombinieren die Zahlungen aus dem Investitionsobjekt...
- ...mit Banktransaktionen
 - also Kreditaufnahme bzw. Anlage von Zahlungen aus dem Investitionsobjekt
- ... so dass eine Annuität entsteht:
 - mit Laufzeit T
 - mit einer Anfangsauszahlung in Höhe von Null
- ... und am Ende der Periode T weder eine Forderung noch eine Verbindlichkeit bei der Bank verbleibt.

Vorgehensweise (2)



Vorgehensweise (3)

1. Berechne Kapitalwert des IOs
2. Barwert Annuität (T) = $Z \cdot \text{RBWF}(i, T)$
3. Barwert Annuität = Kapitalwert IO

Barwert Annuität

$$= Z \cdot \text{RBWF}(i, T)$$

$$= \text{KW}^{\text{IO}}$$

$$\Leftrightarrow Z = \text{KW}^{\text{IO}} / \text{RBWF}(i, T)$$

$$= \text{KW}^{\text{IO}} \cdot \{1 / \text{RBWF}(i, T)\}$$

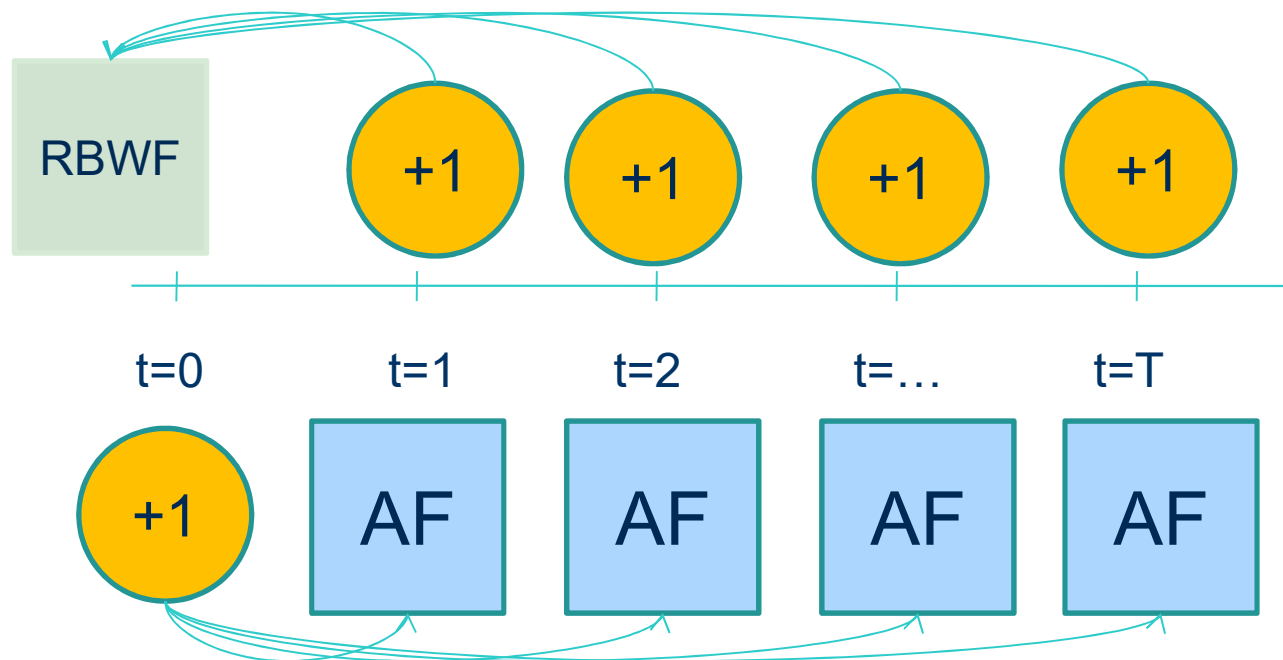
$$\equiv \text{KW}^{\text{IO}} \cdot \text{ANF}(i, T)$$

Annuitätenfaktor und Rentenbarwertfaktor (1)

- Definiere: „Annuitätenfaktor“ (oder auch: „Wiedergewinnungsfaktor“)

$$\text{ANF}(i, T) := 1/\text{RBWF}(i, T)$$

Annuitätenfaktor und Rentenbarwertfaktor (2)



Beispiel (1)

- Wir verwenden einen Zinssatz von $i = 5\%$ und die folgenden IOs:

	t=0	t=1	t=2	t=3
IO ₁	-1.000	+250	+400	+800
IO ₂	-1.000	+700	+400	+250

1. Schritt: Berechnung der Kapitalwerte

- $BW(IO_1)$
 $= 250/(1,05) + 400/(1,05)^2 + 800/(1,05)^3$
 $= 1.291,98$
- $KW(IO_1) = 1.291,98 - 1000 = \underline{291,98}$
- $BW(IO_2)$
 $= 700/(1,05) + 400/(1,05)^2 + 250/(1,05)^3$
 $= 1.245,44$
- $KW(IO_2) = 1.245,44 - 1.000 = \underline{245,44}$

2. Schritt: Berechnung einer Annuität mit gleichem Kapitalwert (1)

- Nun sucht man eine Zahlungsreihe Z ($t=1, \dots$, bis $t=T$) mit Anfangsauszahlung 0, die den gleichen Kapitalwert/Barwert wie das jeweilige IO hat.

- Es muss gelten:

$$KW_{IO} = Z/(1+i) + \dots + Z/(1+i)^T$$

$$= Z * [1/(1+i) + \dots + 1/(1+i)^T]$$

$$\Leftrightarrow Z = KW_{IO} / [1/(1+i) + \dots + 1/(1+i)^T]$$

$$= KW_{IO} * 1/RBWF(i, T)$$

$$\equiv KW_{IO} * \text{“Annuitätenfaktor}(i, T)\text{“}$$

Beispiel (2)

- IO1:

- $KW(IO_1, 5\%) = 291,98$

- $= Z_{IO1} * [1/(1,05) + 1/(1,05)^2 + 1/(1,05)^3]$

- $\Leftrightarrow Z_{IO1} = 291,98 / [1/(1,05) + 1/(1,05)^2 + 1/(1,05)^3]$

- $= 291,98 / 2,723248 \approx \underline{107,21}$

- IO2:

- $KW(IO_2, 5\%) = 245,44$

- $= Z_2 * [1/(1,05) + 1/(1,05)^2 + 1/(1,05)^3]$

- $\Leftrightarrow Z_2 = 245,44 / 2,723248 \approx \underline{90,13}$

3. Schritt

- Bei konkurrierenden IOs wählt man das IO mit der höheren (positiven) Annuität.
- Ein einzelnes IO ist dann vorteilhaft, wenn die Annuität positiv ist.

Beispiel (3)

- Hier würde man IO_1 wählen:
 - $Z_1 = 107,21 > Z_2 = 90,13$
 - Zudem gilt: $Z_1 > 0$
- Man kommt zur gleichen Entscheidung wie bei Verwendung des Kapitalwertes:
 - $KW(IO_1, 5\%) = 291,98 > KW(IO_2, 5\%) = 245,44 > 0$

Probe (1)

- Umwandlung von IO_1 in eine Annuität, $i=5\%$:

t	IO1	Kreditausnahme (+) Kreditrückzahlung (-)	Saldo	Kontostand
t=0	-1.000	+1.000	0	-1.000
t=1	+250	-142,79	107,21	<u>-907,21</u> = -1000*1,05 + 142,79
t=2	+400	-292,79	107,21	-659,78
t=3	+800	-692,79	107,21	0,021 \approx 0

Probe (2)

- Umwandlung von IO_2 in eine Annuität, $i=5\%$:

t	IO1	Banktransaktionen: Kreditaufnahme (+) Kreditrückzahlung (-)	Saldo	Kontostand
t=0	-1.000	+1.000	0	-1.000
t=1	+700	-609,87	90,13	-440,13
t=2	+400	-309,87	90,13	-152,27
t=3	+250	-159,97	90,13	-0,0135 \approx 0

Vergleich mit dem Kapitalwert (1)

- Die Annuität eines IOs erhält man aus dem Kapitalwert gemäß:

$$\text{Annuität}_{IO_1} = \text{KW}(IO_1, i) / \text{RBWF}(i, T)$$

$$\text{Annuität}_{IO_2} = \text{KW}(IO_2, i) / \text{RBWF}(i, T)$$

- Der Faktor $\text{RBWF}(i, T)$ ist aber für alle IOs identisch und positiv.
- Es gilt:

$$\text{KW}(IO_1) > \text{KW}(IO_2)$$



$$\text{Annuität}(IO_1) > \text{Annuität}(IO_2)$$

Fazit: klassischer Kapitalwert, Endwert und klassische Annuität

- Ergebnis:
- Alle drei Verfahren kommen stets zur gleichen Beurteilung von Investitionsobjekten!
- Sie haben lediglich eine etwas andere ökonomische Interpretation.

Aufgabe

- (Aufgabensammlung)