Lineare Verzinsung:

$$K_0 = 200$$

$$r = 0{,}07$$

Allgemeine Formel:

$$K_{t_0+\Delta T} = K_0 \cdot (1 + r \cdot \Delta T)$$

Kapitalbindungsdauer:

$\Delta T = 0{,}5$:

$$200 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 0{,}5) = 207$$

$\Delta T = 1{,}5$:

$$200 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 1{,}5) = 221$$

1 Jahr, 8 Monate:

$\Delta T = 1 + \frac{8}{12}$:

$$200 \cdot \left(1 + 0{,}07 \cdot \left(1 + \frac{8}{12}\right)\right) = 223{,}33$$

5 Jahre:

$\Delta T = 5$:

$$200 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 5) = 270$$

Zinseszinsrechnung, Zinszuschlag am Ende des Jahres:

$$K_0 = 200$$

$$r = 0{,}07$$

Kapitalbindungsdauer:

$\Delta T = 0{,}5$:

$$200 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 0{,}5) = 207$$

$\Delta T = 1{,}5$:

Zwischenschritt

$$K_1 = 200 \cdot (1 + 0{,}07) = 214$$

$$K_{1,5} = 214 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}07) = 221{,}49$$

$\Delta T = 1 + \frac{8}{12}$:

$$K_1 = 200 \cdot (1 + 0{,}07) = 214$$

$$K_{1,5} = 214 \cdot \left(1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}07\right) = 223{,}99$$

$\Delta T = 5$:

$$K_5 = 200 \cdot (1 + 0{,}07)^5 = 280{,}51$$

Monatliche Zinseszinsrechnung:

$$K_0 = 200$$

$$r_M = 0{,}0057$$

Halbes Jahr:

$$200 \cdot (1 + 0{,}0057)^6 = 206{,}94$$

Eineinhalb Jahre:

$$200 \cdot (1 + 0{,}0057)^{18} = 221{,}55$$

Ein Jahr, acht Monate:

$$200 \cdot (1 + 0{,}0057)^{20} = 224{,}08$$

Fünf Jahre:

$$200 \cdot (1 + 0{,}0057)^{60} = 281{,}28$$

Stetige Verzinsung, Zins pro Jahr:

$$K_0 = 200$$

$$\rho = 0{,}07$$

$$K_{\Delta T} = K_0 \cdot \exp(\rho \cdot \Delta T)$$

Halbes Jahr: $\Delta T = 0{,}5$

$$K_{0,5} = 200 \cdot \exp(0{,}07 \cdot 0{,}5) \approx 207{,}12$$

Eineinhalb Jahre: $\Delta T = 1{,}5$

$$K_{1,5} = 200 \cdot \exp(0{,}07 \cdot 1{,}5) \approx 222{,}14$$

Ein Jahr, 8 Monate:

$$K_{1+\frac{8}{12}} = 200 \cdot \exp\left(0{,}07 \cdot \left[1 + \frac{8}{12}\right]\right) \approx 224{,}75$$

Fünf Jahre:

$$K_5 = 200 \cdot \exp(0{,}07 \cdot 5) \approx 283{,}81$$

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1

a)

Anlage von X Geldeinheiten

i) Variante 1: zu 10% pro Jahr (jährliche Zinseszinsrechung)
ii) Variante 2: Zins von r_M pro Monat

Wie muss r_M gewählt werden, sodass man in beiden Varianten am Ende des Jahres denselben Betrag erhält?

$$X \cdot (1+0{,}1)^1 = X \cdot (1+r_M)^{12}$$

$$\Rightarrow$$

$$(1+0{,}1)^1 = (1+r_M)^{12}$$

$$\Rightarrow$$

$$(1+0{,}1)^{\frac{1}{12}} = 1 + r_M$$

$$\Leftrightarrow$$

$$r_M = (1+0{,}1)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}00797 = 0{,}797\%$$

b)

Kapitalbindungsdauer von 2 Jahren

Anlage von X Geldeinheiten

i) Variante 1: zu 10% pro Jahr (jährliche Zinseszinsrechung)

ii) Variante 2: Zins von r_M pro Monat

$$X \cdot 1{,}1^2 = X \cdot (1 + r_M)^{24}$$

$$\Rightarrow$$

$$1{,}1^2 = (1 + r_M)^{24}$$

$$\Rightarrow$$

$$(1{,}1^2)^{\frac{1}{24}} = 1{,}1^{\frac{2}{24}} = 1{,}1^{\frac{1}{12}} = 1 + r_M$$

$$\Leftrightarrow$$

$$r_M = 1{,}1^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}797\%$$

Man erhält dasselbe Ergebnis wie in Aufgabe a)!

Allgemeiner: Kapitalbindungsdauer von $T \in \mathbb{N}$ Jahren

Anlage von X Geldeinheiten

i) Variante 1: zu 10% pro Jahr (jährliche Zinseszinsrechung)

ii) Variante 2: Zins von r_M pro Monat

$$X \cdot 1{,}1^T = X \cdot (1 + r_M)^{T \cdot 12}$$

$$\Rightarrow$$

Ziehe die „$T \cdot 12$“-te Wurzel:

$$(1{,}1^T)^{\frac{1}{T \cdot 12}} = 1{,}1^{\frac{T}{T \cdot 12}} = 1{,}1^{\frac{1}{12}} = 1 + r_M$$

$$\Leftrightarrow$$

$$r_M = 1{,}1^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}797\%$$

Wiederum: Ergebnis wie in Aufgabe a)!

c)

Anlage von X Geldeinheiten

i) Variante 1: zu 7% pro Jahr (jährliche Zinseszinsrechung)
ii) Variante 2: Zins von ρ pro <u>Jahr, stetige Verzinsung</u>

Wie muss ρ gewählt werden, sodass man in beiden Varianten am Ende des Jahres denselben Betrag erhält?

$$X \cdot 1{,}07 = X \cdot e^{\rho}$$

$$\Rightarrow$$

$$1{,}07 = e^{\rho}$$

Wende den natürlichen Logarithmus auf beiden Seiten an:

$$0{,}0677 \approx \ln(1{,}07) = \rho$$

d)

$$X = 100$$

Kapitalbindungsdauer: 20 Jahre

Zinssatz: 12% pro Jahr.

i) „Standardvariante“: jährlicher Zinszuschlag

$$100 \cdot 1{,}12^{20} \approx 964{,}63$$

ii) Zinszuschlag am Ende eines jeden Halbjahrs

Am Ende des ersten Halbjahrs:

$$100 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}12) = 100 \cdot 1{,}06$$

Am Ende des ersten Jahres (zwei Halbjahre):

$$106 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}12) = 100 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06$$

$$= 100 \cdot 1{,}06^2$$

Nach 20 Jahren:

$$100 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}12)^{40} \approx 1028{,}57$$

iii) Zinszuschlag am Ende eines jeden Quartals

$$100 \cdot (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}12)^{80} \approx 1064{,}09$$

iv) Stetige Verzinsung
Abstrakt:

$$K_0 \cdot e^{T \cdot \rho}$$

Konkret:

$$100 \cdot e^{20 \cdot 0{,}12} \approx 1102{,}32$$

Woher kommen die Unterschiede?

Antwort: Je kürzer die Periode, an deren Ende der Zins dem Kapital zugeschlagen wird, desto höher (ceteris parisbus) der Zinseszinseffekt.

Grenzfall/Extremfall: stetige Verzinsung, mit sofortigem Zinseszinseffekt.

Deshalb: Werte steigen von Teilaufgabe i) bis Teilaufgabe iv) jeweils an.

e)

Anlage über 2 Jahre, 3 Monate und fünf Tage

i) Variante 1: zu 10% pro Jahr (jährliche Zinseszinsrechung)

ii) Variante 2: Zins von r_T pro <u>Tag</u>

$$1{,}1^2 \cdot \left(1 + \frac{95}{360} \cdot 0{,}1\right) = (1 + r_T)^{2\cdot 360 + 3\cdot 30 + 5}$$
$$= (1 + r_T)^{815}$$

Erläuterung:

$\frac{95}{360}$ = Anteil der drei Monate und fünf Tage am dritten Jahr, wobei die Standardisierung von 30 Tagen pro Monat verwendet wird.

Konkret:

$$1{,}1^2 \cdot \left(1 + \frac{95}{360} \cdot 0{,}1\right) \approx 1{,}2419306$$
$$= (1 + r_T)^{815}$$

$$\Rightarrow$$

$$r_T = 1{,}2419306^{\frac{1}{815}} - 1 \approx 0{,}00027$$
$$= 0{,}027\%$$

e)

Anlage über T Jahre

i) Variante 1: zu ρ_J pro <u>Jahr</u> (stetige Verzinsung)
ii) Variante 2: zu ρ_T pro <u>Tag</u> (stetige Verzinsung)

$$e^{T\cdot\rho_J} = e^{T\cdot 360\cdot\rho_T}$$

Wende auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus an:

$$T\cdot\rho_J = T\cdot 360\cdot\rho_T$$

$$\rho_J = 360\cdot\rho_T$$

Bzw.

$$\rho_T = \frac{\rho_J}{360}$$

Aufgabe 1.2

Aktie: Kurs wächst um 8% innerhalb eines Jahres.

Durchschnittlicher Wertzuwachs pro Handelstag (bei 252 Handelstagen pro Jahr)?

$$X \cdot 1{,}08 = X \cdot (1 + r_T)^{252}$$

$$r_T = 1{,}08^{\frac{1}{252}} - 1 \approx 0{,}000305 = 0{,}0305\%$$

Alternativ: Durchschnittlicher Wertzuwachs pro Woche? (52 Wochen pro Jahr)

$$X \cdot 1{,}08 = X \cdot (1 + r_W)^{52}$$

$$r_W = 1{,}08^{\frac{1}{52}} - 1 \approx 0{,}1481\% = 0{,}001481$$

Aufgabe 1.3:

	t=0	t=1	t=2
IO1	-100	80	60
IO2	-100	40	110

Bestimme Kapitalwerte beider Objekte.

i) Monatliche Verzinsung, Zins = $r_M = 0{,}4273\%$

IO1:

Zahlung in t=1: 80 Geldeinheiten

$$X_1 \cdot (1 + 0{,}004273)^{12} = 80$$

Barwert:

$$X_1 = \frac{80}{(1 + 0{,}004273)^{12}} \approx 76{,}01$$

Zahlung in t=2: 60 Geldeinheiten

Barwert:

$$X_2 = \frac{60}{(1 + 0{,}004273)^{24}} \approx 54{,}16$$

Kapitalwert:

$$KW(IO_1) = -100 + \frac{80}{(1+0{,}004273)^{12}} + \frac{60}{(1+0{,}004273)^{24}} \approx 30{,}17$$

IO2:

$$KW(IO_2) = -100 + \frac{40}{(1+0{,}004273)^{12}} + \frac{110}{(1+0{,}004273)^{24}} \approx 37{,}30$$

ii) Zinssatz: $\rho = 0{,}05$ pro Jahr, <u>stetige</u> Verzinsung

	t=0	t=1	t=2
IO1	-100	80	60
IO2	-100	40	110

$$
\begin{aligned}
&KW(IO_1)\\
&\quad= -100 + \frac{80}{\exp(0{,}05)} + \frac{60}{\exp(0{,}05)^2}\\
&\quad= -100 + \frac{80}{\exp(0{,}05)}\\
&\quad+ \frac{60}{\exp(2 \cdot 0{,}05)}\\
&\quad= -100 + 80 \cdot \exp(-0{,}05) + 60\\
&\quad\cdot \exp(-0{,}1) \approx 30{,}39
\end{aligned}
$$

Einschub/Anmerkung:

$$\exp(x)^y = \exp(x \cdot y)$$

$$\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$$

Ende Einschub.

IO2:

$$
\begin{aligned}
&KW(IO_2)\\
&\quad= -100 + 40 \cdot \exp(-0{,}05) + 110\\
&\quad\cdot \exp(-0{,}1) \approx 37{,}58
\end{aligned}
$$

iii) Zins $r_T = 0{,}0001553 = 0{,}01553\%$ pro Tag

IO1:

$$KW(IO_1) = -100 + \frac{80}{1{,}0001553^{360}} + \frac{60}{1{,}0001553^{720}} \approx 29{,}30$$

$$KW(IO_1) = -100 + \frac{40}{1{,}0001553^{360}} + \frac{110}{1{,}0001553^{720}} \approx 36{,}19$$

iv) Zinssatz von 5,25% pro Jahr
(Zinszuschlag am Ende des Jahres)

$$KW(IO_1) = -100 + \frac{80}{1{,}0525} + \frac{60}{1{,}0525^2} \approx 30{,}17$$

$$KW(IO_2) = -100 + \frac{40}{1{,}0525} + \frac{110}{1{,}0525^2} \approx 37{,}30$$

Zusatzfrage zu iv): Welche Entscheidung?

- Beide Investitionsobjekte prinzipiell vorteilhaft, da Kapitalwerte positiv sind
- Konkurrierende Objekte, d.h. höchstens ein Objekt kann gewählt werden
- Somit: Wähle IO2, da KW(IO2)=37,30> KW(IO1)=30,17

Aufgabe 2.2

In tausend Geldeinheiten, d.h. 20 entspricht 20000 Geldeinheiten, etc.

	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8
IO1	-20	5	5	4	4	3	3	2	2
IO2	-20	9	1	1	4	4	4	4	0

Zins: i=8%

Konkurrierende Objekte.

a) Beurteilung mit Hilfe des klassischen Kapitalwerts

$$KW(IO_1) = -20 + \frac{5}{1{,}08} + \frac{5}{1{,}08^2} + \frac{4}{1{,}08^3} + \frac{4}{1{,}08^4} + \frac{3}{1{,}08^5} + \frac{3}{1{,}08^6} + \frac{2}{1{,}08^7} + \frac{2}{1{,}08^8} \approx 1{,}21154914$$

Entspricht: 1211,55 Geldeinheiten

$$KW(IO_2) = -20 + \frac{9}{1{,}08} + \frac{1}{1{,}08^2} + \frac{1}{1{,}08^3} + \frac{4}{1{,}08^4} + \frac{4}{1{,}08^5} + \frac{4}{1{,}08^6} + \frac{4}{1{,}08^7} + \frac{0}{1{,}08^8} \approx 0{,}50160$$

Entspricht:

501,60 Geldeinheiten

Investitionsentscheidung:

- Beide Objekte kommen prinzipiell in Frage, da sie einen positiven Kapitalwert haben
- Konkurrierende Objekte -> wähle das Objekt mit dem höheren Kapitalwert
- Somit: Wähle IO1

b) Klassischer Endwert

Variante i):

$$EW(IO_1) = -20 \cdot (1{,}08)^8 + 5 \cdot 1{,}08^7 + 5 \cdot 1{,}08^6 + 4 \cdot 1{,}08^5 + 4 \cdot 1{,}08^4 + 3 \cdot 1{,}08^3 + 3 \cdot 1{,}08^2 + 2 \cdot 1{,}08 + 2 \approx 2{,}24249$$

Entspricht: 2242,49 Geldeinheiten

$$EW(IO_2) = -20 \cdot (1{,}08)^8 + 9 \cdot 1{,}08^7 + 1 \cdot 1{,}08^6 + 1 \cdot 1{,}08^5 + 4 \cdot 1{,}08^4 + 4 \cdot 1{,}08^3 + 4 \cdot 1{,}08^2 + 4 \cdot 1{,}08 + 0 \approx 0{,}92842$$

Entspricht: 928,42 Geldeinheiten

Wähle IO1, da beide Objekte prinzipiell vorteilhaft sind, da beide Objekte konkurrieren und IO1 den höheren positiven Endwert aufweist.

Variante ii)

Schnellere Berechnung:

$$EW(IO; i) = (1 + i)^T \cdot KW(IO; i)$$

Konkret:

$$EW(IO_1) = 1{,}08^8 \cdot KW(IO_1)$$
$$\approx 1{,}08^8 \cdot 1211{,}55 \approx 2242{,}49$$
$$EW(IO_2) = 1{,}08^8 \cdot KW(IO_2)$$
$$\approx 1{,}08^8 \cdot 501{,}60 \approx 928{,}42$$

c) asdf

Aufgabe 2.1

a)

Variante 1:

	2,5%	3%	3,25%	4%	4,5%

Zahlung: 10000 von t=1 bis t=5

$$\frac{10000}{1,025} + \frac{10000}{1,03^2} + \frac{10000}{1,0325^3} + \frac{10000}{1,04^4} + \frac{10000}{1,045^5} = 10000 \cdot \left(\frac{1}{1,025} + \frac{1}{1,03^2} + \frac{1}{1,0325^3} + \frac{1}{1,04^4} + \frac{1}{1,045^5}\right) \approx 44839,71$$

Variante ii)

Zins = 3,45% (flache Zinsstruktur)

Direkte Berechnung:

$$\frac{10000}{1,0345} + \frac{10000}{1,0345^2} + \frac{10000}{1,0345^3} + \frac{10000}{1,0345^4} + \frac{10000}{1,0345^5} \approx 45214,53$$

Berechnung mit Hilfe des Rentenbarwertfaktors:

$$BW = 10000 \cdot \frac{1{,}0345^5 - 1}{1{,}0345^5 \cdot 0{,}0345}$$
$$\approx 45214{,}53$$

b)

Zins i=10% (flache Zinsstruktur/“klassischer“ Fall

Variante i)

2000 Geldeinheiten von t=1 bis t=30

$$BW = 2000 \cdot \frac{1{,}1^{30} - 1}{1{,}1^{30} \cdot 0{,}1} \approx 18853{,}83$$

Variante ii)

„ewige Rente“, d.h. 2000 Geldeinheiten in t=1,2,3…, ∞

Erster Schritt:

Barwert bei endlicher Laufzeit bis T:

$$BW(Z,T,i) = Z \cdot \frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \cdot i}$$

Zweiter Schritt (bei i>0):

Berechne $\lim_{T \to \infty} BW(Z,T,i)$

$$\frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \cdot i} = \frac{(1+i)^T}{(1+i)^T \cdot i} - \frac{1}{(1+i)^T \cdot i}$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{1}{(1+i)^T \cdot i}$$

$$\lim_{T\to\infty} BW(Z,T,i) = Z \cdot \lim_{T\to\infty} RBWF(T,i) = \frac{Z}{i}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \cdot i} = \frac{1}{i}$$

Hier konkret:

Z=2000, i=10%

$$BW = \frac{2000}{0{,}1} = 20000$$

Aufgabe 2.2, Teilaufgabe c):

Vergleiche Objekte mit Hilfe der klassischen Annuität!

Aus Aufgabe a):

KW(IO1) = 1211,55

KW(IO2) = 501,60

$$Annuität(IO) = \frac{KW(IO)}{RBWF(i,T)}$$

$$RBWF(i,T) = \frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \cdot i}$$

$$i = 8\%, T = 8$$

$$RBWF(i = 8\%, T = 8) \approx 5{,}7466389$$

$$Annuität(IO_1) \approx 210{,}83$$

$$Annuität(IO_2) \approx 87{,}29$$

Ergebnis: konkurrierende Objekte, beide haben positive Annuität, kommen also prinzipiell in Frage. Wähle IO1, da es die höhere positive Annuität hat.

Aufgabe 2.3

	t=0	t=1	t=2
IO1	-1000	900	600
IO2	-1000	1100	200

Zins: i=5%

a) Vergleiche beide Objekte (konkurrierend) mit Hilfe der Methode des internen Zinsfußes!

IO1:

$$KW(IO_1, i) = -1000 + \frac{900}{1+i} + \frac{600}{(1+i)^2} = 0$$

$$x = \frac{1}{1+i}$$

$$-1000 + 900 \cdot x + 600 \cdot x^2 = 0$$

Wiederholung: p-q-Formel:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Zwei potentielle Lösungen:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Hier:

Dividiere beide Seiten der Gleichung durch 600, um für den Term x^2 einen Koeffizienten von eins zu erhalten (wie in der p-q-Formel erforderlich)

$$-1000 + 900 \cdot x + 600 \cdot x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{3}{2} \cdot x - \frac{5}{3} = 0$$

$$p = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$q = -\frac{5}{3}$$

$$x_1 = -\frac{1{,}5}{2} + \sqrt{\frac{1{,}5^2}{4} - \left(-\frac{5}{3}\right)}$$

$$= -\frac{1{,}5}{2} + \sqrt{\frac{1{,}5^2}{4} + \frac{5}{3}} \approx 0{,}7430394$$

$$x = \frac{1}{1+i}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$i_1 = \frac{1}{x} - 1 \approx \frac{1}{0{,}7430394} - 1 \approx 34{,}58\%$$

$$x_1 = -\frac{1{,}5}{2} - \sqrt{\frac{1{,}5^2}{4} + \frac{5}{3}} \approx -2{,}2430394$$

$$i_2 \approx -144{,}58\%$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

IO2:

$$KW(IO_2, i) = -1000 + \frac{1100}{1+i} + \frac{200}{(1+i)^2} = 0$$

$$x = \frac{1}{1+i}$$

$$-1000 + 1100 \cdot x + 200 \cdot x^2 = 0$$

Dividiere auf beiden Seiten durch 200:

$$x^2 + 5{,}5 \cdot x - 5 = 0$$

$$x_1 = -\frac{5{,}5}{2} + \sqrt{\frac{5{,}5^2}{4} - (-5)} \approx 0{,}7943617$$

$$i_1 = \frac{1}{x_1} - 1 \approx 25{,}89\%$$

$$x_2 = -\frac{5{,}5}{2} + \sqrt{\frac{5{,}5^2}{4} - (-5)} \approx -6{,}2943617$$

$$i_2 = \frac{1}{x_2} - 1 \approx -115{,}89\%$$

Vergleich der Objekte:

- Generell: negative Lösungen werden ignoriert
- Prinzipiell kommen hier beide Objekte in Frage, da die internen Zinsfüße („Renditen“) größer sind als der Marktzins von 5%
- Konkurrierende Objekte: Wähle IO1, da dessen interner Zinsfuß ($34{,}58\%$) größer ist als der interne Zinsfuß von IO2 ($25{,}89\%$)

b) Vergleich mit Hilfe der Amortisationsdauer

IO1:

t=0: -1000 < 0 (keine Amortisation)

t=1: $-1000 \cdot 1{,}05 + 900 = -150 < 0$ (keine Amortisation) t=2: $-1000 \cdot 1{,}05^2 + 900 \cdot 1{,}05 + 600 = 442{,}5 > 0$

d.h. die Amortisationsdauer des Objektes beträgt zwei Perioden.

IO2:

t=0: -1000 < 0 (keine Amortisation)

t=1: $-1000 \cdot 1{,}05 + 1100 = 50 > 0$

d.h. die Amortisationsdauer des Objektes beträgt eine Periode.

Ergebnis:

Wähle IO2, da es sich schneller amortisiert als IO1 (konkurrierende Objekte)

c) Vergleich mit Hilfe des Kapitalwertes

$$KW(IO_1) = -1000 + \frac{900}{1{,}05} + \frac{600}{1{,}05^2}$$
$$\approx 401{,}36$$

$$KW(IO_2) = -1000 + \frac{1100}{1,05} + \frac{200}{1,05^2}$$
$$\approx 229,02$$

Ergebnis: Beide Objekte prinzipiell vorteilhaft, da Objekte konkurrieren, wird IO1 gewählt, da es den größeren Kapitalwert hat.

Aufgabe 3.1

	Quartal 1	Quartal 2	Quartal 3	Quartal 4
Einzahlungen	$100 \cdot 100 = 10000$	$150 \cdot 100 = 15000$	$100 \cdot 110 = 11000$	$200 \cdot 120 = 24000$
Auszahlungen (variabel)	$100 \cdot 50 = 5000$	$150 \cdot 60 = 9000$	$100 \cdot 60 = 6000$	$200 \cdot 70 = 14000$
Auszahlungen fix	6000	6000	6000	7000
Auszahlungen gesamt:	11000	15000	12000	21000
Einzahlungs -überschuss	-1000	0	-1000	+3000

Wesentlicher Punkt bei der Aufgabe: Abschreibungen sind keine Auszahlungen, sondern müssen ignoriert werden!

Aufgabe 3.3

Zahlungsstrom (Sicht des Kreditnehmers):

t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
+930	-226,21	-226,21	-226,21	-226,21	-226,21

Erläuterung:

- Nicht der gesamte Nennwert von 1000 Geldeinheiten wird ausgezahlt, sondern es gibt einen Abschlag (Disagio) von 7%, sodass man $930 = 1000 \cdot (100\% - 7\%)$ erhält.
- Es handelt sich hier um einen Annuitätenkredit, d.h. die Auszahlung in den Zeitpunkte t=1 bis t=5 ist konstant.

Aufgabe 4.5

Wesentlicher Punkt: Realinvestitionsobjekte -> Zahlungsstromprognose mit vertraglich fest umrissenen Zahlungsströmen passt hier nicht, sondern einschlägig ist das Unterkapitel 2.1.3 im Skript (vertraglich nicht fest umrissene Zahlungsströme)

Skizze:

*empirische Zugänge -> beschreiben, was damit gemeint ist, Beispiele

*theoretischer Zugang -> ebenfalls beschreiben

S. 22-23

Aufgabe 4.1

t=0	t=1	t=2
-1200	1050	700

Zinsstruktur:

$r_{0,1}$	$r_{0,1,5}$	$r_{0,2}$	$r_{0,2,5}$
1%	1,5%	1,8%	3%

Kapitalwert?

$$KW = -1200 + \frac{1050}{1,01} + \frac{700}{1,018^2} \approx 515,07$$

Aufgabe 3.3

(Zahlungsstrom: siehe oben)

Zahlungsstrom (Sicht des Kreditnehmers):

t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
+930	-226,21	-226,21	-226,21	-226,21	-226,21

Nominalzins: 4,25%

t	Kredit (Beginn der Periode)	Zins-zahlung	Annuität	Kredit Ende der Periode
0	1000 (*)	$4{,}25\% \cdot 1000 = 42{,}50$	226,21	$1000 - [226{,}21 - 42{,}50] \approx 816{,}29$
1	$816{,}29$	$816{,}29 \cdot 4{,}25\% \approx 34{,}69$	226,21	$816{,}29 - [226{,}21 - 34{,}69] \approx 624{,}77$
2	$624{,}77$	26,55	226,21	425,11
3	425,11	18,07	226,21	216,91
4	216,91	9,22	226,21	$-0{,}08 \approx 0$

(*): wichtig: Disagio muss hier ignoriert werden

Einschub: Wie erhält man die 226,21?

Antwort:

$$1000 = Annuität \cdot RBWF(i = 4{,}25\%, T = 5)$$

$$\leftrightarrow Annuität = \frac{1}{RBWF(i = 4{,}25\%, T = 5)} \cdot 1000$$

$$RBWF(i = 4{,}25\%, T = 5) = \frac{1{,}0425^5 - 1}{1{,}0425^5 \cdot 0{,}0425} \approx 4{,}4207289$$

$$\frac{1}{RBWF(i = 4{,}25\%, T = 5)} = 0{,}226207$$

Ende Einschub

Aufgabe 4.2

Stelle Zahlungsstrom der Anleihen auf (aus Sicht des Käufers)

	t=0	t=1	t=2
Anleihe 1	- (80,5+2) = - 82,5 (*)	4	104
Anleihe 2	-76	0	100

Anleihe 1: Kurs 80,50 Euro, Nennwert 100 Euro, Kuponsatz 4%, Restlaufzeit 2 Jahre, Stückzinsen 2 Euro.

(*): wichtig: Stückzinsen müssen beim Kauf zusätzlich zum Kurs bezahlt werden.

Anleihe 2: Kurs 76 Euro, Kuponsatz 0%, Restlaufzeit 2 Jahre, Stückzinsen 0 Euro

Aufgabe 4.3

a)

Zur Erinnerung: Abschreibungen sind keine Zahlungen!

Zeitstruktur:

“heute“: t

In einem Jahr: t+1

In zwei Jahren: t+2

Zahlungen:

t+1: $100 \cdot [100 - 50] - 6000 = -1000$

t+2: $250 \cdot [100 - 60] - 6000 = 4000$

b)

$$r_{t,t+1} = 15{,}61\%$$

$$r_{t,t+2} = 14{,}71\%$$

Grundidee:

$$KW \geq 0$$

Konkretisierung:

$$-Z + \ -\frac{1000}{1{,}1561} + \frac{4000}{1{,}1471^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Z \leq -\frac{1000}{1{,}1561} + \frac{4000}{1{,}1471^2} = Barwert$$

Man wäre somit maximal bereit, den Barwert zu bezahlen

Konkret:

$$-\frac{1000}{1{,}1561} + \frac{4000}{1{,}1471^2} = 2174{,}91$$

c) sdf

Grundidee: verwende Kapitalwert als Beurteilungskriterium

Grenzfall: KW=0

Idee: Setze die (zunächst unbekannte) Stückzahl, die in t+2 mindestens verkauft werden muss, als Variable N an:

$$3000 = -\frac{1000}{1{,}1561} + \frac{N \cdot [100 - 60] - 6000}{1{,}1471^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3000+\frac{1000}{1{,}1561}=\frac{N\cdot[100-60]-6000}{1{,}1471^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\{3000+\frac{1000}{1{,}1561}\right\}\cdot 1{,}1471^2$$
$$=N\cdot[100-60]-6000$$

$$\Leftrightarrow$$

$$N=\frac{1}{40}$$
$$\cdot\left(\left\{3000+\frac{1000}{1{,}1561}\right\}\cdot 1{,}1471^2\right.$$
$$\left.+\,6000\right)\approx 277{,}14$$

Sofern nur ganzzahlige Stückzahlen möglich sind: mindestens 278 Stück (aufrunden!) müssen verkauft werden!

Aufgabe 5.1

In Tausend Geldeinheiten (20 bedeutet also beispielsweise 20000)

t	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
E_t	0	25	25	80	80
A_t	100	10	30	10	10
Saldo	-100	+15	-5	+70	+70

a) Wann leistungswirtschaftlicher Kapitalbedarf?

Antwort: In t=0 (-100) und in t=2 (-5) besteht jeweils ein leistungswirtschaftlicher Kapitalbedarf.

b) Finanzierung durch Zero-Bond

Zinssatz: 10% (flache Zinsstruktur hier unterstellt)

t	VP	Finanzmarkt		ZMB	Verbindl.	
		+	-		vor	nach
0	-100	+100	0	0	0	100
1	+15	0	0	15	110	110
2	-5	0	0	10	121	121
3	+70	0	0	80	133,1	133,1
4	+70	0	146,41	3,59	146,41	0

Zahlungsbereitsschaft? Ist hier gesichert, da in allen Zeitpunkten ein nichtnegativer Zahlungsmittelbestand vorliegt.

c) Finanzierung über Kuponanleihe (Kuponsatz von 10%)

t	VP	Finanzmarkt		ZMB	Verbindl.	
		+	-		vor	nach
0	-100	100	0	0	0	100
1	+15	0	10	5	110	100
2	-5	0	10	-10	110	100
3	+70	0	10	50	110	100
4	+70	0	110	10	110	0

Zahlungsbereitschaft ist nicht gesichert, da im Zeitpunkt 2 ein negativer Kassenbestand auftritt.

Aufgabe 5.2 (Dean Modell)

	t=0	t=1	t=2	Rendite/int. Zinsfuß
IO1	-100	11,5	103,2	
IO2	-50	28,5	30,8	
FO1	50	-29	-27	
FO2	50	-5	-55	

Interne Zinsfüße:

FO2: Man erkennt direkt, dass der interne Zinsfuß 10% beträgt (zur Überprüfung: einfach in Kapitalwertformel von FO2 einen Zins von 10% einsetzen, nachrechnen, dass der Kapitalwert gleich 0 ist).

IO1:

$$0 = KW(IO_1, i) = -100 + \frac{11{,}5}{1+i} + \frac{103{,}2}{(1+i)^2}$$

p-q-Formel:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösung: 7,5%

Herleitung:

$$x = \frac{1}{1+i}$$

$$0 = -100 + 11{,}5 \cdot x + 103{,}2 \cdot x^2$$

Dividiere auf beiden Seiten durch 103,2:

$$0 = x^2 + \frac{11{,}5}{103{,}2} \cdot x - \frac{100}{103{,}2}$$

$$p = \frac{11{,}5}{103{,}2}$$

$$q = -\frac{100}{103{,}2}$$

$$x_1 = -\frac{11{,}5}{103{,}2 \cdot 2} + \sqrt{\left(\frac{11{,}5}{103{,}2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} - \left(-\frac{100}{103{,}2}\right)}$$

$$= 0{,}9302$$

Rücksubstitution:

$$i = \frac{1}{x_1} - 1 = 0{,}075 = 7{,}5\%$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Zweite, negative Lösung:

Kann entfallen, wird zur Lösung der Aufgabe nicht benötigt.

IO2:

$$0 = -50 + \frac{28{,}5}{1+i} + \frac{30{,}8}{(1+i)^2}$$

$$x = \frac{1}{1+i}$$

$$0 = -50 + 28{,}5 \cdot x + 30{,}8 \cdot x^2$$

Dividiere durch 30,8 auf beiden Seiten:

$$x^2 + \frac{28{,}5}{30{,}8} \cdot x - \frac{50}{30{,}8} = 0$$

$$p = \frac{28{,}5}{30{,}8}$$

$$q = -\frac{50}{30{,}8}$$

$$x_1 = -\frac{28{,}5}{2 \cdot 30{,}8} + \sqrt{\left(\frac{28{,}5}{30{,}8}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{50}{30{,}8}}$$

$$\approx 0{,}8929$$

$$i = \frac{1}{x_1} - 1 \approx \frac{1}{0{,}8929} - 1 \approx 12\%$$

(es reicht, die positive Lösung zu bestimmen)

FO1:

$$0 = 50 - \frac{29}{1+i} - \frac{27}{(1+i)^2}$$

$$0 = 50 - 29 \cdot x - 27 \cdot x^2$$

Dividiere durch -27:

$$x^2 + \frac{29}{27} \cdot x - \frac{50}{27} = 0$$

$$x_1 = -\frac{29}{2 \cdot 27} + \sqrt{\left(\frac{29}{27}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{50}{27}} \approx 0{,}9259$$

$$i = \frac{1}{x_1} - 1 \approx \frac{1}{0{,}9259} - 1 = 8\%$$

FO2: 10% (siehe oben; kann man ohne p-q-Formel erkennen)

	t=0	t=1	t=2	Rendite/int. Zinsfuß
IO1	-100	11,5	103,2	7,5%
IO2	-50	28,5	30,8	12%
FO1	50	-29	-27	8%
FO2	50	-5	-55	10%

Ergebnis: Kombiniere IO2 mit FO1

Begründung:

- IO2 ist das beste Investitionsobjekt, FO1 das beste Finanzierungsobjekt
- Beide haben hier (zufälligerweise) das gleiche Volumen 50 Geldeinheiten.
- Es lohnt sich nicht, IO1 mit FO2 zu kombinieren, da hier der int. ZF des Finanzierungsobjektes höher als derjenige des Investitionsobjektes wäre

b)

•	t=0	t=1	t=2
IO2	-50	28,5	30,8
FO1	50	-29	-27
Saldo	0	-0,5	+3,8

Zahlungsbereitschaft ist in t=1 <u>nicht</u> gegeben!

Aufgabe 6.1

W'	0,005	0,01	0,025	0,2325	0,4325	0,165	0,1	0,02	0,01
P(t+1)	85	90	95	100	105	110	115	120	125

a) Bestimme den Erwartungswert:

$$E = 85 \cdot 0{,}005 + 90 \cdot 0{,}01 + 95 \cdot 0{,}025 + 100 \cdot 0{,}2325 + 105 \cdot 0{,}4325 + 110 \cdot 0{,}165 + 115 \cdot 0{,}1 + 120 \cdot 0{,}02 + 120 \cdot 0{,}01 \approx 105{,}6625$$

b) Mean Absolute Deviation, Varianz und Standardabweichung

$$Varianz = (85 - 105{,}6625)^2 \cdot 0{,}005 + (90 - 105{,}6625)^2 \cdot 0{,}01 + \cdots + (120 - 105{,}6625)^2 \cdot 0{,}02 + (125 - 105{,}6625)^2 \cdot 0{,}01 \approx 34{,}7485938$$

Alternativ:

$$Varianz(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = 85^2 \cdot 0{,}005 + 90^2 \cdot 0{,}01 + \cdots + 120^2 \cdot 0{,}02 + 125^2 \cdot 0{,}01$$

$$Varianz(X) = E(X^2) - 105{,}6625^2$$
$$= 85^2 \cdot 0{,}005 + 90^2 \cdot 0{,}01 + \cdots + 120^2 \cdot 0{,}02 + 125^2 \cdot 0{,}01 - 105{,}6625^2$$
$$\approx 34{,}7485938$$

$$Standardabweichung = \sqrt{Varianz} = \sqrt{34{,}7485938} \approx 5{,}8948$$

$$MAD = |85 - 105{,}6625| \cdot 0{,}005 + |90 - 105{,}6625| \cdot 0{,}01 + \cdots + |120 - 105{,}6625| \cdot 0{,}02 + |125 - 105{,}6625| \cdot 0{,}01 \approx 4{,}2591$$

c) Lower Partial Moments der Ordnungen 0,1 und 2

Referenzwert = Erwartungswert = 105,6625

W‘	0,005	0,01	0,025	0,2325	0,4325	0,165	0,1	0,02	0,01
P(t+1)	85	90	95	100	105	110	115	120	125

$$LPM_0 = 0{,}005 + 0{,}01 + 0{,}025 + 0{,}2325 + 0{,}4325 = 0{,}705$$

$$LPM_1 = 0{,}005 \cdot (85 - 105{,}6625) + 0{,}01 \cdot (90 - 105{,}6625) + 0{,}025 \cdot (95 - 105{,}6625) + 0{,}2325 \cdot (100 - 105{,}6625) + 0{,}4325 \cdot (105 - 105{,}6625) \approx -2{,}1296$$

$$LPM_2 = 0{,}005 \cdot (85 - 105{,}6625)^2 + 0{,}01 \cdot (90 - 105{,}6625)^2 + 0{,}025 \cdot (95 - 105{,}6625)^2 + 0{,}2325 \cdot (100 - 105{,}6625)^2 + 0{,}4325 \cdot (105 - 105{,}6625)^2 \approx 15{,}0747$$

Für nächste Woche:

Begriffe

- Dichtefunktion
- Verteilungsfunktion
- Quantil
- Normalverteilung

wiederholen

Aufgabe 6.2 (Value-at-Risk für den diskreten Fall)

W‘	0,005	0,01	0,025	0,2325	0,4325	0,165	0,1	0,02	0,01
P(t+1)	85	90	95	100	105	110	115	120	125

$P_t = 100$ (Preis der Aktie heute)

P_{t+1}: zukünftige Preis (z.B. in einem Jahr), stochastisch

$$W_t = 2500$$

Somit: Man erhält 25 Stück.

Value-at-Risk bei zulässiger Überschreitungswahrscheinlichkeit von 5%?

<u>Schritt 1</u>: Bestimme die Verlustverteilung

$$V_{t+1} = 2500 - 25 \cdot P_{t+1}$$

Allgemeiner:

$$Verlust = Referenzwert - W_{t+1}$$

Dabei: W_{t+1} ist das stochastische Vermögen

Beispiele für den Referenzwert:

- $Referenzwert = W_t$
- $Referenzwert = E(W_{t+1})$

W‘	0,005	0,01	0,025	0,2325	0,4325	0,165	0,1	0,02	0,01
P(t+1)	85	90	95	100	105	110	115	120	125
V_{t+1}	$2500 - 25 \cdot 85 = 375$	$2500 - 25 \cdot 90 = 250$	125	0	-125	...	...	...	...
$P(V_{t+1} > v)$	0	$0{,}5\%$	$1{,}5\%$	4%	$27{,}25\%$				

$P(V_{t+1} > v)$: Überschreitungswahrscheinlichkeit für den Verlust v

Ergebnis: Value-at-Risk = 0

Denn: 0 ist der

- …kleinste Verlust
- … der die zulässige, maximale Überschreitungswahrscheinlichkeit einhält

Aufgabe 6.3 (Value-at-Risk bei normalverteiltem Vermögen)

Ausgangspunkt:

Wesentliche Voraussetzung:

Vermögen W_{t+1} ist normalverteilt.

$$W_{t+1} \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$$

<u>Schritt 0</u>: Definiere das Verlustkonzept

$$V_{t+1} = Ref - W_{t+1}$$

Ref: Referenzwert (siehe Aufgabe 6.2)

<u>Schritt 1</u>: Bestimme die Verlustverteilung

$$V_{t+1} = Ref - W_{t+1}$$

Der Verlust V_{t+1} ist dann <u>ebenfalls</u> normalverteilt.

Allgemein gilt:

Wenn $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ eine normalverteilte Größe ist und wenn a und b konstante Zahlen sind (d.h. keine Zufallsgrößen), dann ist auch

$$Y = a + b \cdot X$$

normalverteilt.

Hier: $a = Ref, b = -1$

Erwartungswert und Varianz des Verlustes?

$$E(V_{t+1}) = E(Ref - W_{t+1}) = E(Ref) - E(W_{t+1}) = Ref - E(W_{t+1}) \\ = Ref - \mu_W$$

dabei: μ_W Erwartungswert des Vermögens, „Input“ der Aufgabe

$$Var(V_{t+1}) = Var(Ref - W_{t+1}) = Var(-W_{t+1}) = Var(W_{t+1}) \\ = \sigma_W^2$$

Zur Erinnerung:

$$Var(a + b \cdot X) = Var(b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$$

Zwischenfazit:

Der Verlust ist normalverteilt mit:

- Erwartungswert $Ref - \mu_W$
- Varianz σ_W^2

Dabei: μ_W ist der (gegebene) Erwartungswert des Vermögens, σ_W^2 ist entsprechend die Varianz des Vermögens.

Verbleibendes Problem: Bestimme z.B. das 95%-Quantil der Verlustverteilung

Schritt 2: Bestimme das 95%- bzw. 99%-Quantil der Verlustverteilung

Problem: Verlust ist zwar normalverteilt, aber im Allgemeinen nicht standardnormalverteilt, sodass das gesuchte Quantil noch nicht direkt aus der Tabelle für die Standardnormalverteilung abgelesen werden kann.

Lösung:

Ist X eine normalverteilte Größe mit Erwartungswert μ_X und Varianz σ_X^2, so lässt sich das 95%-Quantil (Entsprechendes gilt für alle anderen Quantile) von X ausdrücken über das 95%-Quantil der Standardnormalverteilung:

Konkret gilt:

$$Q_{\mu_X,\sigma_X^2}(95\%) = \mu_X + \sigma_X \cdot Q_{0,1}(95\%)$$

wobei gilt:

$Q_{0,1}(95\%)$ sei das 95%-Quantil der Standardnormalverteilung

$Q_{\mu_X,\sigma_X^2}(95\%)$ sei das 95%-Quantil von $N(\mu_X, \sigma_X^2)$

Konkretisierung:

$$Value - at - Risk(95\%) = Ref - \mu_W + \sigma_W \cdot Q_{0,1}(95\%)$$

$$Value - at - Risk(99\%) = Ref - \mu_W + \sigma_W \cdot Q_{0,1}(99\%)$$

Anwendung auf Aufgabe 6.3:

Aktie hat normalverteilte Rendite R_{t+1} mit Erwartungswert $\mu = 0{,}00234$ und Varianz $\sigma^2 = 0{,}01274^2$.

$W_t = 5000$ (heutige Vermögen)

$$W_{t+1} = W_t \cdot (1 + R_{t+1})$$

W_t: konstant (d.h. nicht stochastisch)

Dann ist W_{t+1} normalverteilt mit den Parametern:

$$E(W_{t+1}) = W_t \cdot (1 + \mu) = 5000 \cdot 1{,}00234 \approx 5011{,}7$$

$$Var(W_{t+1}) = Var\big(W_t \cdot (1 + R_{t+1})\big) = Var(W_t + W_t \cdot R_{r+1})$$
$$= Var(W_t \cdot R_{r+1}) = W_t^2 \cdot \sigma^2 \approx 63{,}7^2$$

$$Stdabw(W_{t+1}) = 5000 \cdot 0{,}01274 \approx 63{,}7$$

„Kochrezept“:

Zutatenliste:

$$\mu_W = E(W_{t+1}) = 5011{,}7$$
$$\sigma_W = Stdabw(W_{t+1}) = 63{,}7$$
$$Q_{0,1}(0{,}95) = 1{,}64485$$
$$Q_{0,1}(0{,}99) = 2{,}32635$$

Rezept:

$$VaR(0{,}95) = Ref - \mu_W + \sigma_W \cdot Q_{0,1}(0{,}95)$$
$$VaR(0{,}99) = Ref - \mu_W + \sigma_W \cdot Q_{0,1}(0{,}99)$$

Variante 1:

Referenzwert = 5000, 95%

$$VaR(0{,}95) = 5000 - 5011{,}7 + 63{,}7 \cdot 1{,}64485$$
$$\approx 93{,}08$$

Variante 2:

Referenzwert = $E(W_{t+1}) = \mu_W$, 95%

$$
\begin{aligned}
VaR(0{,}95) &= Ref - \mu_W + \sigma_W \cdot Q_{0,1}(0{,}95) \\
&= \mu_W - \mu_W + \sigma_W \cdot Q_{0,1}(0{,}95) \\
&= \sigma_W \cdot Q_{0,1}(0{,}95) = 63{,}7 \cdot 1{,}64485 \approx 104{,}78
\end{aligned}
$$

Variante 3:

Referenzwert = 5000, 99%

$$
\begin{aligned}
VaR(0{,}95) &= 5000 - 5011{,}7 + 63{,}7 \cdot 2{,}32635 \\
&\approx 136{,}49
\end{aligned}
$$

Variante 4:

Referenzwert = $E(W_{t+1}) = \mu_W$, 99%

$$VaR(0{,}95) = 63{,}7 \cdot 2{,}32635 \approx 148{,}19$$