

Philipps



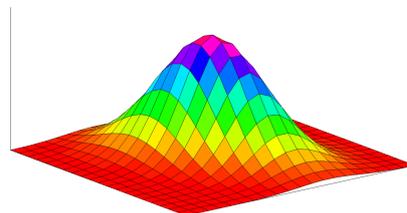
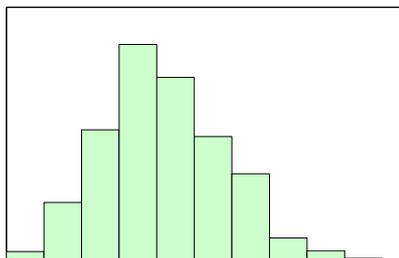
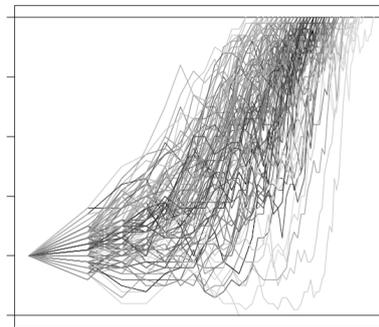
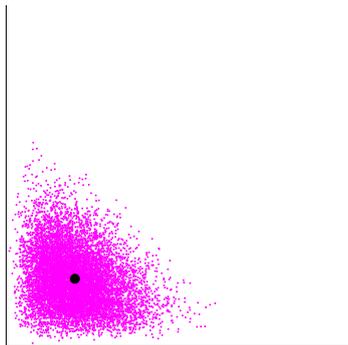
Universität
Marburg

Discussion Papers on Statistics and Quantitative Methods

Minimierung der Fahrtdauer von Elektrofahrzeugen
mit Modellen der stochastischen Lagerhaltungstheorie

Karl-Heinz Schild

6 / 2017



Download from:

<http://www.uni-marburg.de/fb02/statistik/forschung/discpap>

Coordination: Prof. Dr. Karlheinz Fleischer • Philipps-University Marburg
School of Business and Economics • Research group Statistics
Universitätsstraße 25 • D-35037 Marburg
E-Mail: k.fleischer@wiwi.uni-marburg.de

Minimierung der Fahrdauer von Elektrofahrzeugen mit Modellen der stochastischen Lagerhaltungstheorie

Karl-Heinz Schild¹

16. Februar 2017

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Modell zur Minimierung der Gesamtdauer von Fahrten mit Elektrofahrzeugen (Summe von Aufladezeit und Fahrzeit) durch optimale Wahl der Batterieaufladung und der Fahrgeschwindigkeit entwickelt. Das Modell unterstellt einen deterministischen Effekt der Fahrgeschwindigkeit auf den Energieverbrauch und behandelt andere Faktoren mit Einfluss auf den Energieverbrauch als stochastische Störgrößen. Die simultane Optimierung über Aufladungsmenge und Fahrgeschwindigkeit führt vor allem dann zu interessanten, teils kontraintuitiven Implikationen, wenn, wie realistischerweise anzunehmen, die Aufnahmeleistung der Batterie mit der bereits gespeicherten Energie abnimmt. Dann verhalten sich die optimale Aufladung und Geschwindigkeit *gegenläufig* bei Änderung von Parametern, die weder die Aufladefrequenz noch den geschwindigkeitsdeterminierten Verbrauch tangieren. Zum Beispiel *sinkt* i.d.R. der Energieverbrauch pro Streckeneinheit im Optimum bei Verlängerung des Abstands zwischen den Ladestationen oder Vergrößerung der Varianz der stochastischen Verbrauchskomponente, da beides höhere Auflademengen, mithin niedrigere Geschwindigkeiten optimal werden lässt.

Mit zunehmender Elektromobilität im Individualverkehr dürften die Implikationen des Modells nicht nur betriebs-, sondern auch volkswirtschaftlich relevant sein, wenn man davon ausgeht, dass Fahrer primär die Zeit, die sie mit dem Fahrzeug benötigen, optimieren (und dabei auf heuristischem Weg zu ähnlichen Ergebnissen wie das Modell kommen). Gerade im Hinblick auf „intelligente Netztechnologien für regenerative Energien“ erscheint es sinnvoll, sich über das Nachfrageverhalten einer Klientel Gedanken zu machen, die Prognosen zufolge in absehbarer Zeit den größten Stromverbraucher darstellen wird.

¹Dr. Karl-Heinz Schild, Philipps-Universität Marburg, School of Business and Economics, Research group Statistics, Universitätsstraße 25, D-35037 Marburg, E-Mail: schild@wiwi.uni-marburg.de

1 Einleitung

Bei Fahrten oder Transporten mit Elektrofahrzeugen müssen beträchtliche Zeiten zum Aufladen der Batterie vorgesehen werden. Eine längere Aufladezeit (höhere Aufladung) der Batterie lässt sich nicht notwendigerweise durch höhere Fahrgeschwindigkeit (verkürzte Fahrzeit) kompensieren, da der Energieverbrauch mit der Fahrgeschwindigkeit anwächst. Wir entwickeln Modelle, bei denen die Summe aus Aufladezeit und Fahrzeit durch Wahl von Aufladung der Batterie und Fahrgeschwindigkeit minimiert wird, wo also ein in Bezug auf die insgesamt benötigte Zeit optimaler Trade-Off zwischen höherer Fahrgeschwindigkeit und höherer Aufladung stattfindet. Das finale Modell stellt ein dynamisches Modell mit stochastischem Verbrauch dar, wobei die Dynamik bei mehreren Lade-Fahr-Zyklen dadurch entsteht, dass Restenergie in der Batterie am Ende eines Zyklus zu einer Verkürzung des Ladevorgangs im nächsten Zyklus führt. Das finale Modell berücksichtigt außerdem, dass die Geschwindigkeit der Energieaufnahme von Batterien typischerweise mit der bereits gespeicherten Energie abnimmt, Batterien also abnehmende, keine konstanten Aufladeraten haben.

Zur Modellierung der Unsicherheit über den Verbrauch nehmen wir an, dass zwar zufällige Erhöhungen des Grundverbrauchs an geladener Energie auf den einzelnen Etappen eintreten, die jedoch nicht den Effekt der Fahrgeschwindigkeit auf den Verbrauch tangieren. Unter dieser Annahme gilt bei optimalem Trade-Off zwischen Fahrgeschwindigkeit v und Aufladung A der Batterie – durchgängig durch alle betrachteten Modelle – folgende Gleichung:

$$v^2 \cdot f'(v) = P_a(A)$$

wobei $f(v)$ den Verbrauch pro Streckeneinheit bei Fahrgeschwindigkeit v darstellt und $P_a(A)$ die Aufnahmeleistung bei Aufladung A der Batterie. Da diese Gleichung lediglich den Verbrauchseffekt $f'(v)$ der Geschwindigkeit und die Energieaufnahme-Charakteristik $P_a(A)$ der Batterie involviert, gilt sie vollkommen losgelöst von der Etappenlänge s , der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Verbrauchserhöhungen sowie der Höhe des Zeitverlusts bei vorzeitigem Leerfahren der Batterie und des Zeitgewinns aus Restenergie. Sie definiert eine Kurve in der (A, v) -Ebene, auf der die zeitminimierende Lösung (A^*, v^*) stets liegt, weswegen wir von der Optimalitätskurve reden. Bei abnehmenden Aufladeraten, d.h. $P'_a(A) < 0$, ist die Optimalitätskurve fallend, was zur Folge hat: Wenn die optimale Aufladung sich aufgrund der Änderung eines dieser Parameter, etwa einer Verlängerung der Strecke oder einer Vergrößerung der Varianz des Grundverbrauchs, erhöht, dann reduziert sich (nicht etwa: erhöht sich) die optimale Geschwindigkeit. Anschaulich gesprochen werden Energieeinheiten, deren Aufladung mehr Zeit erfordert hat, auch vorsichtiger verbraucht, indem langsamer gefahren wird. („Teurere Energieeinheiten werden weniger leichtfertig verbraucht.“)

In Bezug auf die optimale Aufladung ist das Modell eine Erweiterung des (t, S) -Modells der stochastischen Lagerhaltungstheorie, wobei t hier nicht für die Periode, sondern für einen Lade-Fahr-Zyklus (eine „Etappe“) steht. Spezifisch für die Zeitminimierung bei Elektrofahrzeugen sind hohe Fehlmengenkosten (hoher Zeitverlust bei einem vorzeitigem Leerfahren der Batterie), aber fast verschwindende Lagerkosten, da Transport bzw. Transfer von Energie in den nächsten Zyklus praktisch keinen Zeitverlust verursacht. Da wir auf eine Gleichgewichtslösung fokussieren, wird anstatt der vollen Bellman-Rekursion myopische Theorie verwendet (vgl. Porteus (2002)). Da eine Gleichgewichtslösung nur bei Homogenität der Etappen entstehen kann, geht es in dieser Arbeit nicht um den optimalen Ausgleich von Aufladungen zwischen Etappen mit unterschiedlichen Kosten- und/oder Unsicherheitsparametern, wie sie z.B. bei unterschiedlichen Längen der Etappen entstehen. (Vermutlich würde die Optimalitätskurve aber auch diese Erweiterung überstehen). Praktisch anzuwenden wäre ein solches Modell z.B. in einer Situation, wo mit Elektrofahrzeugen zwischen zwei Stationen gependelt wird und die Parameter bei Hin- und Rückfahrt sich nicht unterscheiden. Hierbei ließen sich auch Zeitverluste beim Anfahren/Anschließen der Ladestationen als „Fixkosten“ berücksichtigen, was (s, S) -Politiken bei der Aufladung optimal macht. Wie in der Zusammenfassung bereits angedeutet, dürfte das Modell auch im Hinblick auf „intelligente Netztechnologien für eine große Menge von Autobatterien als Energiespeicher“ von Interesse sein, da es zu Aussagen über das Verhalten der Speicherbesitzer kommt.

2 Modell mit deterministischem Verbrauch

2.1 Deterministisches Grundmodell: Konstante Aufladerate

Wir betrachten zunächst ein Grundmodell, dessen Lösungsformel in allen späteren Modellen auftreten wird: Ein Elektrofahrzeug, dessen Batterie zu Anfang leer ist, soll mit einer Energiemenge A aufgeladen werden, die gerade ausreicht, um eine Strecke s mit (mittlerer) Geschwindigkeit v zurückzulegen. Wir nehmen an, dass der Energieverbrauch pro Streckeneinheit während der Fahrt mit Geschwindigkeit v durch eine konvex wachsende Funktion $F(v)$ beschrieben wird, d.h. $F'(v) > 0, F''(v) \geq 0$. Als ein (recht realistisches) Modell kann man $F(v) = \alpha + \beta v^2$ nehmen, wobei α , oder allgemeiner $F(0)$, eine Art Grundverbrauch pro Streckeneinheit darstellt und β die Empfindlichkeit misst, mit der der Energieverbrauch auf Änderungen von v reagiert. Natürlich wird der Energieverbrauch während einer Fahrt von vielen weiteren Faktoren (wie Fahrweise, Geländebeschaffenheit, Verkehrsaufkommen, Außentemperatur usw.) beeinflusst. Deswegen werden wir α bzw. $F(0)$ später durch eine Zufallsvariable ersetzen, die den Mehrverbrauch pro Streckeneinheit aufgrund von geschwindigkeitsunabhängigen Umständen erfasst. Das α hier sollte als der Erwartungswert solcher zufälligen Verbrauchserhöhungen interpretiert werden. Nimmt man α , wie $F(v)$ insgesamt, als sicher an, so steht die benötigte Energie, um die Strecke mit der Geschwindigkeit v zu befahren, fest: Sie beträgt $A = sF(v)$.

Wir nehmen zunächst an, dass die Batterie eine konstante Aufladerate P_a hat, d.h. die benötigte Zeit um eine weitere Energieeinheit in der Batterie zu speichern, beträgt stets $c_a = 1/P_a$, egal wieviel Energie schon in der Batterie gespeichert ist. P_a wird üblicherweise in Einheiten der elektrischen Leistung, kW, gemessen. Eine typische Aufnahmeleistung beträgt $P_a = 50$ kW, mit denen man auch 1000 50-Watt-Glühlampen zum Leuchten bringt oder 50 1000-Watt Staubsauger zum Saugen. Hier liest man 'kW' besser als 'kWh pro Stunde', da elektrische Energien meist in kWh gemessen werden und P_a angibt, wieviel kWh pro Stunde die Batterie aufnimmt. Z.B. nimmt eine Batterie, wenn sie mit einer Aufladerate von $P_a = 50$ kW gespeist wird, 50kWh pro Stunde auf. Wenn die Batterie eine Kapazität von $A_{max} = 100$ kWh hat, dauert eine vollständige Aufladung mit $P_a = 50$ kW zwei Stunden.

Die Zeit, um die leere Batterie so weit aufzuladen, dass man eine Strecke s mit der Geschwindigkeit v abfahren kann, beträgt $t_a = A/P_a$ mit $A = sF(v)$, d.h. $t_a = sF(v)/P_a$. Wir stellen uns nun die Aufgabe, die gesamte Dauer eines Lade-Fahr-Zyklus über die Strecke – Aufladezeit t_a plus Fahrzeit $t_s = s/v$ – durch Wahl von v zu minimieren:

$$\min_{v>0} t(v) := sF(v)/P_a + s/v$$

Wir ermitteln gleich die Ableitungen:

$$\begin{aligned} t'(v) &= sF'(v)/P_a - s/v^2 \\ \Rightarrow t''(v) &= sF''(v)/P_a + 2s/v^3 \end{aligned}$$

Da wir (realistischerweise) $F''(v) \geq 0$ angenommen haben, ist $t''(v) \geq 0$ für $v > 0$. D.h. $t(v)$ ist eine auf ganz $(0, \infty)$ konvexe Funktion. Die globale Konvexität von $t(v)$ stellt sicher, dass man mit einer Lösung $v > 0$ der Gl. $t'(v) = 0$ eine globale Minimalstelle von $t(v)$ bekommt. Die Umformung

$$t'(v) = 0 \iff sF'(v)/P_a - s/v^2 = 0 \iff v^2 F'(v) = P_a$$

zeigt, dass eine Lösung $v = v^* > 0$ dieser Gl. immer existiert, da die Funktion $g(v) := v^2 F'(v)$ von $g(0) = 0$ auf $g(\infty) = \infty$ streng monoton wächst (da $F'(v)$ positiv ist und wg. $F''(v) \geq 0$ nicht fällt).

Beispiel: Wenn $F(v) = \alpha + \beta v^2$, dann lautet die Formel für das zeit-minimierende v^* :

$$F(v) = \alpha + \beta v^2, v^2 F'(v) = P_a : \quad 2\beta v^3 = P_a \iff v = \sqrt[3]{P_a/2\beta} =: v_{cPa}^*(P_a)$$

Der Wert von β bei derzeitigen Elektrofahrzeugen wird unten auf etwa $15 \cdot 10^{-6}$ kW/[km/h]³ geschätzt. Bei einer konstanten Aufladeleistung von $P_a = 60$ kW ergibt sich eine optimale Geschwindigkeit von $v^* = \sqrt[3]{60/30} \cdot 10^{6/3}$ km/h = $\sqrt[3]{2} \cdot 100$ km/h ≈ 126 km/h. Bei $P_a = 90$ kW Ladeleistung ergibt sich mit $v^* = \sqrt[3]{3} \cdot 100$ km/h ≈ 144 km/h eine um ca. 15% höhere optimale Geschwindigkeit. (Da $v_{cPa}^*(P_a) = \sqrt[3]{P_a/2\beta}$ eine Elastizität von $\frac{1}{3}$ hat, war eine Vergrößerung um $\frac{1}{3} \cdot 50\% = 16.\bar{6}\%$ zu erwarten.) Der umgekehrte Effekt, die Abnahme von v^* mit abnehmendem P_a , ist fundamental für diese Arbeit. \square

Bevor wir den Fall $F(v) = \alpha + \beta v^2$ weiter diskutieren, sollen einige allgemeine Eigenschaften der Lösung dieses Problems festgehalten werden. Allgemein schreiben wir $v_{cPa}^*(P_a)$ für die (eindeutige) Lösung der Gleichung $v^2 F'(v) = P_a$. Das Akronym „cPa“ steht für „constant P_a “, um zu betonen, dass hier eine konstante Aufladeleistung P_a (die man als Aufladerate – kWh pro Stunde – liest) vorausgesetzt wurde:

Satz 1: Wenn der Verbrauch pro Streckeneinheit, $F(v)$, die Bedingungen $F(0) > 0$, $F'(v) > 0$, $F''(v) \geq 0$ für $v \geq 0$ erfüllt, so ist $v_{cPa}^*(P_a)$ (existent und) eindeutig bestimmt für jedes $P_a \geq 0$. Es gilt:

1. $v_{cPa}^*(P_a)$ ist unabhängig von der Streckenlänge s .
2. $v_{cPa}^*(P_a)$ wächst mit P_a von $v_{cPa}^*(0) = 0$ auf $\lim_{P_a \rightarrow \infty} v_{cPa}^*(P_a) = \infty$, wobei $\lim_{P_a \rightarrow 0} v_{cPa}^*(P_a)' = \infty$

Für die Elastizität $\varepsilon(P_a) = P_a \frac{v_{cPa}^*(P_a)'}{v_{cPa}^*(P_a)}$ von $v_{cPa}^*(P_a)$ gilt die Formel $\varepsilon(P_a) = \frac{1}{2 + v^3 F''(v)/P_a} \Big|_{v=v_{cPa}^*(P_a)}$. Sie zeigt, dass $\varepsilon(P_a)$ stets $\leq \frac{1}{2}$ ist, wobei der Wert $\frac{1}{2}$ nur mit linearem $F(v)$ erreicht wird.

3. Mit $v_{cPa}^*(P_a)$ sind auch der Verbrauch pro Streckeneinheit $F(v)$ und die effektive Geschwindigkeit $v_{eff}(v) = s/t(v)$ im Optimum $v = v_{cPa}^*(P_a)$: a) unabhängig von s und b) monoton wachsend in P_a .
4. Anstatt die Gesamtdauer $t(v; P_a) = t_a(v; P_a) + s/v = s F(v)/P_a + s/v = s \cdot (F(v)/P_a + 1/v)$ zu minimieren kann man auch die effektive Geschwindigkeit $v_{eff}(v; P_a) = s/t(v; P_a)$ über v maximieren: das optimale v ist beide Male $v_{cPa}^*(P_a)$. Im Optimum gilt: $\frac{d}{dP_a} \frac{1}{v_{eff}(v_{cPa}^*(P_a), P_a)} = -\frac{F(v_{cPa}^*(P_a)) v_{cPa}^*(P_a)'}{P_a^2}$.
5. Im Fall $F(v) = \alpha + \beta v^2$ gilt für die effektive Geschwindigkeit im Optimum $v^* = \sqrt[3]{P_a/(2\beta)}$:

$$\frac{1}{v_{eff}^*} = \frac{\alpha}{P_a} + \frac{3}{2} \frac{1}{v^*}$$

Dies zeigt, dass stets $v_{eff}^* < \frac{2}{3} v^*$, wobei die Relation $\frac{2}{3}$ nur für $P_a \rightarrow \infty$ (oder $\alpha \rightarrow 0$) erreicht wird.

Für das Verhältnis von Aufladezeit $t_a = \frac{s F(v)}{P_a}$ zu Fahrzeit $t_s = \frac{s}{v}$ in v^* erhält man hier:

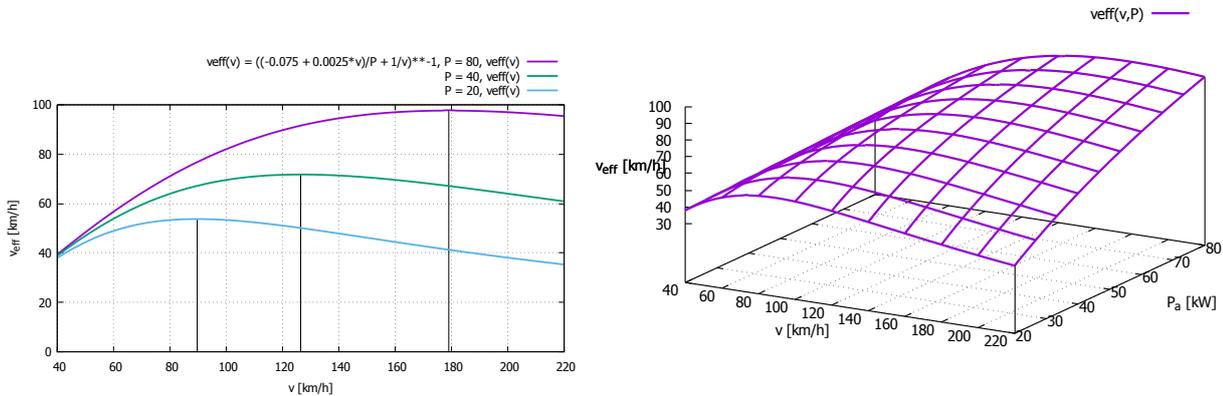
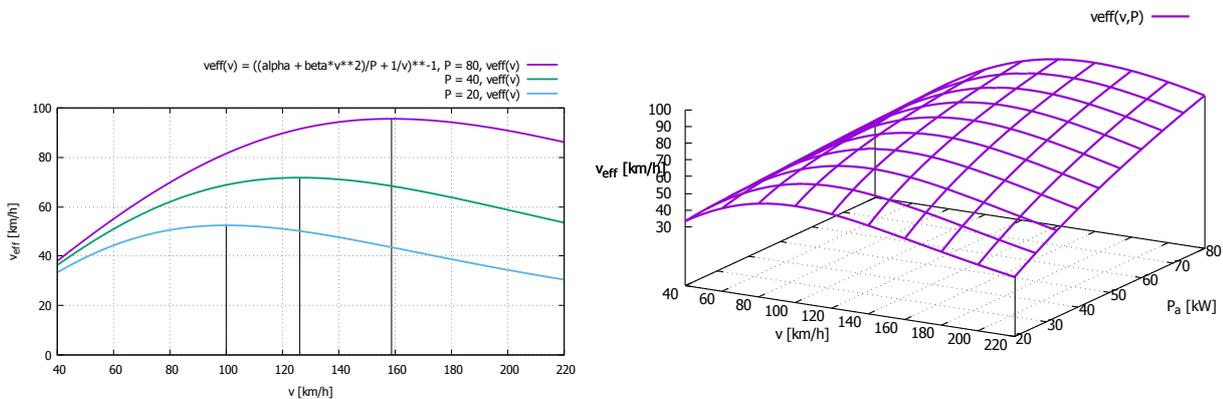
$$\frac{t_a^*}{t_s^*} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{(2\beta)^{1/3} P_a^{2/3}}$$

Dies zeigt, dass stets $t_a^* \geq \frac{1}{2} t_s^*$, wobei die Relation von $\frac{1}{2}$ nur für $P_a \rightarrow \infty$ oder $\alpha \rightarrow 0$ erreicht wird.

Ähnliche Formeln wie in 5. gelten auch für $F(v) = \alpha + \beta v^\gamma$ mit bel. $\gamma > 1$ (natürlich mit anderen asymptotischen Relationen, d.h. die Werte $2/3$ bzw. $1/2$ gelten nur bei $\gamma = 2$.)

Beispiel: Wir verwenden $F(v) = \alpha + \beta v^2$ mit $\alpha = 8.1$ kWh/100km und $\beta = 15 \cdot 10^{-6}$ kW/[km/h]³ (wie oben), das man hier besser als $\beta = 1.5 \cdot 10^{-3}$ [kWh/100km]/[km/h]² liest. Bei $P_a = 60$ kW hatten wir oben bereits $v^* = 126$ km/h ermittelt. Bei dieser Geschwindigkeit ergibt sich ein Verbrauch für eine Strecke von 100km von $F(v^*) = (8.1 + 1.5 \cdot 10^{-3} 126^2) \approx (8.1 + 23.8)$ kWh/100km, also ca. 32kWh auf 100km. Bei einer Aufladerate von $P_a = 60$ kWh pro Stunde, dauert es $t_a = 32/60 = 0.5\bar{3}$ Stunden (32 Minuten), um die Energie für eine Strecke von 100 km aufzuladen. Die Fahrzeit für diese Strecke bei Geschwindigkeit $v^* = 126$ km/h beträgt $t_s = 100/126 \approx 0.8$ Stunden (48 Minuten). Die effektive Geschwindigkeit ermittelt sich mit $v_{eff} = s/(t_a + t_s) = 100/(0.5\bar{3} + 0.8)$ km/h zu $v_{eff} = 75$ km/h. Die Relation von $v_{eff} = 75$ km/h zu $v^* = 126$ km/h beträgt ca. 0.60, so dass man schon recht nahe an der asymptotischen $2/3$ -Relation liegt. Die Relation von Aufladezeit $t_a = 0.5\bar{3}h$ zu Fahrzeit $t_s = 0.8h$ beträgt 0.6 (exakt $2/3$, aber das ist Zufall) und ist noch deutlich größer als $1/2$.

Die Rechnung mit $P_a = 90$ kW ($\Rightarrow v^* = 144$ km/h) liefert $F(v^*) = (8.1 + 31.1) = 39.2$ kWh/100 km. Um die Energie für eine Strecke von $s = 288$ km aufzuladen, benötigt man $t_a = 2.88 \cdot 39.2/90 \approx 1.25$ Stunden (75 Minuten) und die Fahrzeit für diese Strecke beträgt $t_s = 288/144 = 2$ Stunden (120 Minuten). Die Relation von Auflade- zu Fahrzeit beträgt $75/120 = 0.625$, etwas näher an $1/2$ als bei $P_a = 60$ kW, aber immer noch deutlich entfernt davon. Die effektive Geschwindigkeit beträgt $v_{eff} = s/(t_a + t_s) = 288/(1.25 + 2) \approx 88.6$ km/h, was eine Relation von $88.6/144 = 0.615$ zu v^* ergibt (die Relation liegt hier, bei $P_a = 90$ kW, geringfügig näher an $2/3$ als bei $P_a = 60$ kW). \square

Illustration: Effektive Geschwindigkeit v_{eff} als Funktion von v, P_a .Lineares Verbrauchsmodell, $F(v) = \alpha + \beta v$:Quadratisches Verbrauchsmodell, $F(v) = \alpha + \beta v^2$:**Beweis von Satz 1:** (Rudimentär)Zu 2.: Schreibe $v = v(P_a) := v_{cP_a}^*(P_a)$. Differenziere die definierende Gl. $P_a = v^2 F'(v)$ nach P_a :

$$\begin{aligned} 1 &= (2v F'(v) + v^2 F''(v)) \cdot v' \\ \Rightarrow v' &= 1 / (2v F'(v) + v^2 F''(v)) \quad \text{Zeigt insbes.: } v' > 0 \Rightarrow v(P_a) = v_{cP_a}^*(P_a) \text{ mon. wchsd.} \\ \Rightarrow \underbrace{P_a (v'/v)}_{\varepsilon_v(P_a)} &= \underbrace{P_a / (2v^2 F'(v) + v^3 F''(v))}_{P_a} = 1 / (2 + v^3 F''(v)/P_a) \leq 1/2 \end{aligned}$$

$$\text{Auch: } \frac{d}{dP_a} \ln(v) = \frac{v'}{v} = \frac{1}{2P_a + v^3 F''(v)} \rightarrow \infty \text{ f\u00fcr } P_a \rightarrow 0$$

Zu 3. Dass $F(v^*(P_a))$ mit P_a w\u00e4chst, ist einfach: $\frac{d}{dP_a} F(v(P_a)) = F'(v(P_a)) \cdot v'(P_a) > 0$. Schwieriger:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dP_a} \frac{1}{v_{eff}^*} &= \frac{d}{dP_a} \left(\frac{1}{v} + \frac{F(v)}{P_a} \right) = \left(-\frac{1}{v^2} + \frac{F'(v) P_a - F(v)}{P_a^2} \right) \cdot v' \\ &= \left(-\frac{1}{v^2} + \frac{F'(v)}{P_a} - \frac{F(v)}{P_a^2} \right) \cdot v', \quad \text{wobei } \frac{F'(v)}{P_a} = \frac{v^2 F'(v)}{v^2 P_a} = \frac{P_a}{v^2 P_a} = \frac{1}{v^2} \\ &= \left(0 - \frac{F(v)}{P_a^2} \right) \cdot v' = -\frac{F(v) v'}{P_a^2} < 0 \Rightarrow \frac{1}{v_{eff}^*} \text{ f\u00e4llt} \Rightarrow v_{eff}^*(P_a) \text{ w\u00e4chst} \end{aligned}$$

Zu 5.

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{eff}} &= \frac{1}{v} + \frac{F(v)}{P_a} = \frac{1}{v} + \frac{\alpha + \beta v^2}{P_a} \\ \frac{1}{v_{eff}^*} &= \left(\frac{2\beta}{P_a} \right)^{1/3} + \frac{\alpha}{P_a} + \frac{\beta}{P_a} \left(\frac{P_a}{2\beta} \right)^{2/3} \\ &= \left(\frac{2\beta}{P_a} \right)^{1/3} + \frac{\alpha}{P_a} + \left(\frac{1}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\beta}{P_a} \right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{2\beta}{P_a} \right)^{1/3} + \frac{\alpha}{P_a} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{P_a} \right)^{1/3} = \frac{\alpha}{P_a} + \frac{3}{2} \left(\frac{2\beta}{P_a} \right)^{1/3} = \frac{\alpha}{P_a} + \frac{3}{2} \frac{1}{v^*} \\ \frac{t_a}{t_s} &= \frac{s F(v) P_a}{s/v} = \frac{v F(v)}{P_a} \\ &= v \cdot (\alpha + \beta v^2) / P_a = (\alpha v + \beta v^3) / P_a \\ \frac{t_a^*}{t_s^*} &= \alpha \left(\frac{P_a}{2\beta} \right)^{1/3} / P_a + \beta \frac{P_a}{2\beta} / P_a \\ &= \frac{\alpha}{(2\beta)^{1/3} P_a^{2/3}} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.1.1 Kalibrierung des Modells

Zur Kalibrierung des Modells verwenden wir Daten, die auf der Internet-Seite der Fa. Tesla² für das „Model S“ angegeben sind.

Aufladung: Die eingebaute Batterie wird mit einer Kapazität von $A_{max} = 90$ kWh angegeben. Die Ladeleistung P_a bei einem Heimgerät wird mit 11 kW, diejenige einer „Chademo“-Ladestation mit 50 kW und diejenige einer „Supercharging“-Station mit 120 kW angegeben.³ Zumindest beim „Supercharging“ scheint dies nur die initiale Aufladerate darzustellen. Anders als wir hier angenommen haben, nimmt die Auflade- (= Aufnahme-) Leistung von Batterien mit der bereits gespeicherten Energie ab, und dieser Effekt scheint beim Supercharging massiv zu sein. Tesla empfiehlt jedenfalls, die Batterie nur zu 80 Prozent, d.h. auf 72 kWh, aufzuladen. Die Zeit dafür soll 40 Minuten betragen, was einer mittleren Ladeleistung von 108 kW entspricht. Realistischer sind vermutlich Aufladeraten bis 80 kW. Da wir hier von konstanten Aufladeraten ausgehen, sollte eine gemittelte, nicht die initiale Aufladerate verwendet werden. Die verwendeten Raten sollten auch den Zeitverlust aufgrund des „Overheads“ eines Ladevorgangs berücksichtigen (Anfahren, evtl. Warten auf Verfügbarkeit, Anschließen an die Station, Abfahrt usw.).

Verbrauch: Aus den Reichweite-Angaben auf der Internet-Seite lässt sich der Verbrauch pro Streckeneinheit F für einige Geschwindigkeiten v ermitteln:

v [km/h]	70	80	90	100	110	120
$F(v)$ [kWh/100km]	13.1	14.5	16.2	18.1	20.2	22.6

Der tatsächliche Verbrauch hängt von vielen weiteren Umständen, wie Außentemperatur, Geländebeschaffenheit, Verkehrsdichte usw., ab, die später als zufällige Störungen modelliert werden.

Anmerkung: Die (nominellen) Verbrauchswerte erscheinen sehr vorteilhaft gegenüber einem Fahrzeug mit Verbrennungsmotor. Setzt man den Energiegehalt eines Liters Erdöl mit 10 kWh an, so kommt ein Erdöl-getriebenes Auto mit einem durchschnittlichen Verbrauch von 8 Litern auf 100 km auf einen Verbrauch von 80 kWh/100km, also viermal so viel wie der nominelle Verbrauch von ca. 20 kWh/100km eines Tesla Model S bei $v = 110$ km/h. Da bekannt ist, dass die Herstellerangaben unter vollkommen unrealistischen Bedingungen ermittelt sind (Beispiel: ein Auto mit de-facto Verbrauch von 8 Litern Benzin auf 100 km wird mit 5 Litern/100km angegeben), ist vorstellbar, dass sich Tesla diesem Vorgehen anpasst und die tatsächliche Relation beim Energieverbrauch eher bei einem Faktor von 2 bis 2.5 zu Gunsten des Elektromobils liegt. Die Relation verschlechtert sich weiter, wenn man sich auf die eingesetzte Primärenergie bezieht, da Strom ein schwierig zu speichernder und schwierig zu transportierender Energieträger ist (Energieverluste bei Speicherung und Transport). Wenn die Energie zum Laden des Elektromobils in einem entfernt stehenden Kohlekraftwerk erzeugt wird, besteht laut Masuch et al.(2012) in Bezug auf die CO₂-Emission kein Vorteil des Elektromobils. \square

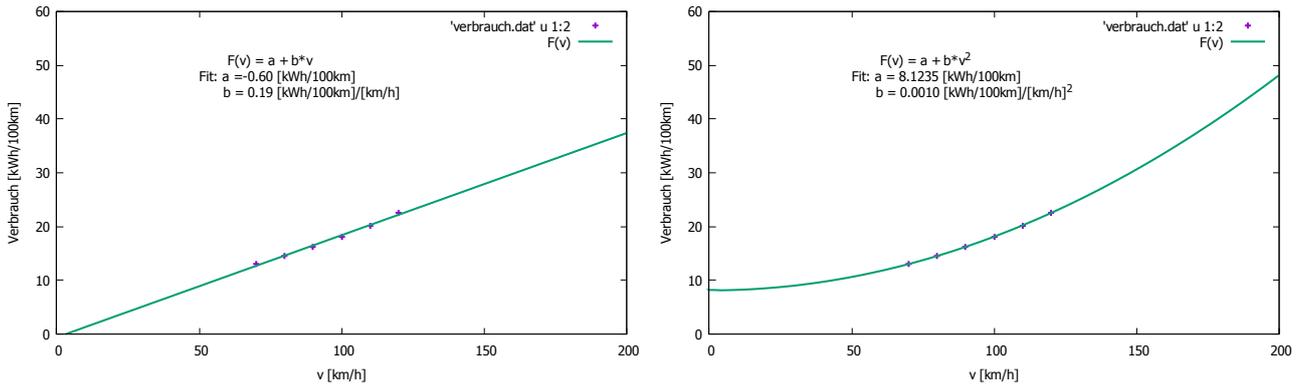
Fitten der Verbrauchsdaten: Auf Basis der obigen Daten kann man die Koeffizienten α und β im linearen Verbrauchsmodell $F(v) = \alpha + \beta v$ bzw. im quadratischen Modell $F(v) = \alpha + \beta v^2$ durch Regressionen von „ F auf Konstante und v “ bzw. „ F auf Konstante und v^2 “ schätzen.⁴ Es ergeben sich die in den folgenden Diagrammen angegebenen Schätzwerte.

²https://www.tesla.com/de_DE/models,

siehe auch <http://energiespeicher.blogspot.de/2016/01/tesla-geschwindigkeit-optimieren.html>

³https://www.tesla.com/de_DE/supercharger.

⁴Theoretisch wächst die Leistung von Wind, der von Geschwindigkeit v auf 0, d.h. vollständig, abgebremst wird, sogar wie v^3 : Die in der Zeit Δt von einer Fläche A abgebremste Luftmasse beträgt $m(\Delta t) = \rho A v \Delta t$, wenn ρ (≈ 1.25 kg/m³) die Dichte von Luft darstellt, da das abgebremste Volumen $V(\Delta t) = A v \Delta t$ beträgt. Die theoretische Windleistung auf der Fläche A ist die pro Zeiteinheit Δt umgewandelte kinetische Energie: $P_{Wind,theor.} = \frac{1}{2} m(\Delta t) v^2 / \Delta t = \frac{1}{2} \rho A v^3$.



Bereits optisch ist zu erkennen, dass das quadratische Modell besser zu den Daten passt. Das lineare Modell hat zusätzlich den Makel dass das Interzept α negativ geschätzt wird. Zwar spielt α keine Rolle in der Formel für das minimierende v^* , aber natürlich geht es in alle Größen ein, die den Verbrauch involvieren, wie z.B. die effektive Geschwindigkeit. Vor allem aber sollte man das quadratische Modell aus physikalischen Gründen vorziehen: Der Luftwiderstand wächst (mindestens) mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Wie in den Diagrammen zu sehen, ergeben sich beim quadratischen Modell wesentlich höhere Verbrauchswerte bei Geschwindigkeiten oberhalb des datengestützten Bereichs – und das ist aus physikalischen Gründen vermutlich korrekt(er). Wie in den vorherigen Diagrammen zu den effektiven Geschwindigkeiten zu erkennen, „übertreibt“ das lineare Modell in beide Richtungen: Es kommt zu größeren optimalen Geschwindigkeiten als das quadratische bei hohen Aufladeraten und zu kleineren bei kleinen Aufladeraten. Das ist vermutlich eine Folge dessen, dass es den Verbrauch (bzw. die Empfindlichkeit, mit der er auf Änderungen der Geschwindigkeit reagiert) bei kleinen Geschwindigkeiten zu hoch und bei großen Geschwindigkeiten zu niedrig ansetzt.

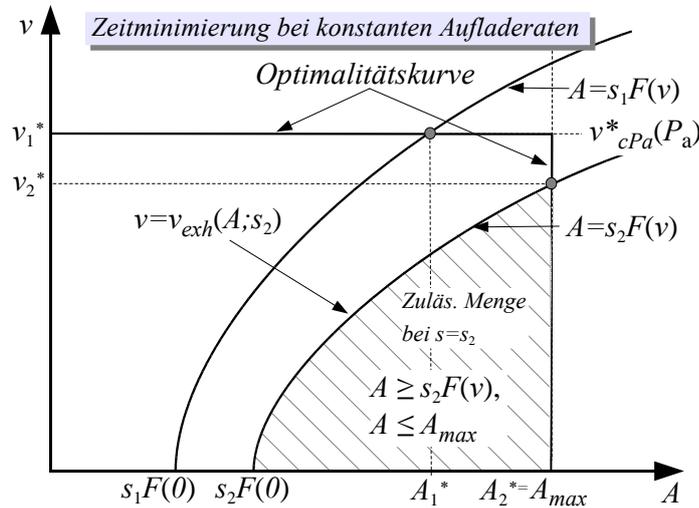
2.2 Erweiterung des deterministischen Modells mit konstanten Aufladeraten

Es soll nun berücksichtigt werden, dass die Batterie eine endliche Kapazität A_{max} hat. Außerdem soll nicht vorgegeben sein, dass gerade so viel Energie geladen wird, wie für die Strecke s benötigt wird (so dass die Batterie am Ende der Strecke leer gefahren ist): $A \geq sF(v)$ statt $A = sF(v)$. Mit anderen Worten: Auch die Auflademenge A soll ein Objekt der Optimierung sein, das den Restriktionen $A \leq A_{max}$ und $A \geq sF(v)$ unterliegt. Um das Leerfahren der Batterie weniger attraktiv zu machen, soll ein evtl. verbleibender Rest an Energie in der Batterie am Ende der Strecke nicht wertlos sein (dies auch im Hinblick auf die dynamische Version des Modells). Da „Werte“ hier in Zeiteinheiten gemessen werden, entspricht dies einer „Zeitrückgewinnung durch Restenergie“ – die Restenergie E übersetzt sich, bei konstanter Aufladerate der Batterie, in eine Zeit $t_e = c_e E$ (wobei $c_e = 1/P_e$), die in der Zielfunktion abzuziehen ist. Da sich Energie niemals von alleine vermehrt, nehmen wir $c_e < c_a = 1/P_a$ (d.h. $P_e > P_a$) an. Mit $E = A - sF(v)$ als verbleibender Energie am Ende der Strecke lautet das zu behandelnde Modell:

$$\min_{(A,v): v>0; A \leq A_{max}; A \geq sF(v)} t(A, v) := c_a \cdot A + \frac{s}{v} - c_e \cdot (A - sF(v)) \quad \text{mit } c_e < c_a$$

Das Ergebnis dieser Optimierung lässt sich vorhersehen: Da die Kostenverminderung $c_e \cdot (A - sF(v))$ aus einer Wahl $A > sF(v)$ (d.h. einer Nicht-Bindung der Restriktion $A \geq sF(v)$) geringer ist als die Kostenvermehrung um $c_a \cdot (A - sF(v))$ beim Aufladen, ist es, wenn die Batterie das zulässt, optimal, $A = sF(v)$ zu wählen (egal, mit welcher Geschwindigkeit v dann letztendlich gefahren wird), d.h. gerade so viel aufzuladen, wie für die Strecke benötigt wird. Setzen wir $A = sF(v)$ ein, bleibt für v genau das Zeitminimierungsproblem des letzten Abschnitts, das wir schon gelöst haben. Was ist, wenn dabei eine Energie $A = sF(v^*) > A_{max}$ herauskommt? Die Antwort ist natürlich: $A^* = A_{max}$ und v^* möglichst groß, nämlich so groß, dass beide Restriktionen $A \geq sF(v^*)$ und $A \leq A_{max}$ binden. Bezeichnen wir die Umkehrfunktion von $v \rightarrow A = sF(v)$ mit $v_{exh}(A)$ („exh“ steht für „exhausted“,

da $v_{exh}(A)$ gerade die Geschwindigkeit angibt, mit der man die mit der Menge A geladene Batterie auf der Strecke s leer fährt)⁵, so ist in diesem Fall $v^* = v_{exh}(A_{max})$ zu wählen. Die Lösung lässt sich graphisch in der (A, v) -Ebene darstellen, wobei man die Lösung für alle Streckenlängen s bekommt. Die Optimalitätskurve, auf der sich die Lösung findet, hat hier einen Knick im Punkt $(A_{max}, v_{cPa}^*(P_a))$. Die „Zeitrückgewinnungsrate aus Restenergie“ $P_e = 1/c_e$ spielt keine Rolle für die Lösung, solange $c_e < c_a$.



Satz 2: Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist die Lösung des Problems

$$\min_{(A,v): v>0; A \leq A_{max}; A \geq sF(v)} t(A, v) := c_a \cdot A + \frac{s}{v} - c_e \cdot (A - sF(v)) \quad \text{mit } c_e < c_a$$

durch den eindeutigen Schnittpunkt der Kurve $\{(A, v) : v > 0, A = sF(v)\}$ mit der Optimalitätskurve aus obiger Graphik gegeben. D.h. die Lösung (für ein gegebenes s mit $sF(0) \leq A_{max}$) lässt sich ermitteln, indem man zunächst $v_* = v_{cPa}^*(P_a)$ und $A_* = sF(v_*)$ ermittelt und dann (A^*, v^*) gemäß

$$(A^*, v^*) = \begin{cases} (A_*, v_{cPa}^*(P_a)) & \text{falls } A_* \leq A_{max} \\ (A_{max}, v_{exh}(A_{max})) & \text{falls } A_* > A_{max} \end{cases}$$

Beim gleichen Problem, aber $c_e = c_a$, ist jeder Punkt $(A, v_{cPa}^*(P_a))$ mit $A \in [sF(v^*), A_{max}]$ ($v^* = v_{cPa}^*(P_a)$) eine Lösung des Problems (sofern $sF(v^*) \leq A_{max}$, ansonsten $(A_{max}, v_{exh}(A_{max}))$).

Beweis mit Kuhn/Tucker-Theorie: Die Lagrange-Funktion des Problems lautet (die Bedingung $v > 0$ muss dabei nicht als Restriktion berücksichtigt werden, da die Zielfkt. für $v \searrow 0$ unendlich groß wird):

$$L(A, v; \lambda, \mu) = -t(A, v) - \lambda \cdot (sF(v) - A) - \mu \cdot (A - A_{max}) = -c_a \cdot A - \frac{s}{v} + (c_e + \lambda) \cdot (A - sF(v)) - \mu \cdot (A - A_{max})$$

Die Kuhn/Tucker-Bedingungen (einen Punkt (A, v) , der sie erfüllt, nennen wir KT-Punkt) lauten:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial A} = -c_a + c_e + \lambda - \mu \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial v} = +\frac{s}{v^2} - (c_e + \lambda) sF'(v) \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} c_e + \lambda &= c_a + \mu \\ v^2 F'(v) &= \frac{1}{c_e + \lambda} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v^2 F'(v) = \frac{1}{c_a + \mu} \Rightarrow v = v_{cPa}^*\left(\frac{1}{c_a + \mu}\right)$$

mit $\lambda \geq 0$, $A \geq sF(v)$ und $\lambda \cdot (A - sF(v)) = 0$ sowie $\mu \geq 0$, $A \leq A_{max}$ und $\mu \cdot (A - A_{max}) = 0$.

Anmerkung: Aus $\mu \geq 0$ und $c_a > c_e$ folgt $\lambda = c_a + \mu - c_e > 0$, so dass „ $A \leq sF(v)$ “ stets binden muss.

Sei $v_* := v_{cPa}^*\left(\frac{1}{c_a}\right)$, $A_* := sF(v_*)$.

Wenn $A_* \leq A_{max}$, so stellt $(A = A_*, v = v_*)$ einen KT-Punkt mit $\mu = 0$ und $\lambda = c_a - c_e > 0$ dar.

Wenn $A_* > A_{max}$, existiert ein $\mu > 0$, so dass $sF\left(v_{cPa}^*\left(\frac{1}{c_a + \mu}\right)\right) = A_{max}$ (da F u. v_{cPa}^* stetig wachsen). Mit diesem μ und $\lambda = c_a + \mu - c_e > 0$ liegt dann ein KT-Punkt bei $(A = A_{max}, v = v_{cPa}^*\left(\frac{1}{c_a + \mu}\right))$.

Jeder KT-Punkt ist hier eine Lösung des Minimierungsproblems, da die Lagrange-Funktion bei festen nicht-negativen Lagrange-Multiplikatoren (λ, μ) konkav in (A, v) auf der zulässigen Menge ist. \square

⁵Formelmäßig ist $v_{exh}(A) = F^{-1}(A/s)$, wobei F^{-1} die Umkehrfkt. von $v \rightarrow F(v)$ ist – eine Funktion, die Geschwindigkeiten $v \in [0, \infty)$ bijektiv auf Werte der Einheit „Energ.Verbrauch pro Strecke“ (kWh/100km) $F \in [F(0), \infty)$ abbildet.

2.3 Deterministisches Modell mit abnehmenden Aufladeraten

Es soll nun berücksichtigt werden, dass Batterien mit wachsender Ladung „schwieriger“ zu laden sind, d.h. dass die Abbildung $t_a \rightarrow A(t_a)$, die angibt wieviel Energie A nach einer Ladezeit von $t = t_a$ in der Batterie gespeichert ist, *konkav* wachsend ist (mit der Zeit abnehmende Aufladerate $A'(t_a)$). Die Umkehrfunktion τ_a , die angibt, welche Zeit $t = \tau_a(A)$ benötigt wird, um in der Batterie eine Energiemenge A zu speichern, ist dann *konvex* wachsend. Die Funktion $P_a(A) = 1/\tau'_a(A)$ gibt die Aufladerate als Funktion der bereits gespeicherten Energie A wieder, denn

$$P_a(A) := \frac{1}{\tau'_a(A)} = \frac{dA}{dt} \Big|_{t=\tau_a(A)} = \begin{array}{l} \text{Aufladerate (Energiezunahme pro Zeiteinheit)} \\ \text{bei der bereits erreichten Aufladung } A \end{array}$$

Wir unterstellen, dass nach einer endlichen Aufladezeit t_{max} die Kapazität A_{max} der Batterie erreicht ist. Im ersten Teil dieses Abschnitts werden wir den Fall behandeln, dass die Aufladerate $A'(t)$ für $t \rightarrow t_{max}$ verschwindet: $\lim_{t \rightarrow t_{max}} A'(t) = 0$, was $\lim_{A \rightarrow A_{max}} \tau'_a(A) = \infty$ bzw. $\lim_{A \rightarrow A_{max}} P_a(A) = 0$ zur Folge hat. (Der Fall, dass $P_a(A)$ in einem Punkt $P_{min} > 0$ bei $A = A_{max}$ endet, z.B. $P_a(A) = e^{-\lambda A}$, wird später behandelt.) Als Prototypen für solche Funktionen verwenden wir:

$$A(t) = A_{max} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{t}{t_{max}}\right)^\gamma\right], \quad \tau_a(A) = t_{max} \cdot \left[1 - \sqrt[\gamma]{1 - \frac{A}{A_{max}}}\right] \quad \text{mit } \gamma > 1$$

Hierbei sind die Grenzeffekte $A'(t)$ und $P_a(A) = 1/\tau'_a(A)$ gegeben durch

$$A'(t) = \gamma \frac{A_{max}}{t_{max}} \left(1 - \frac{t}{t_{max}}\right)^{\gamma-1}, \quad P_a(A) = \gamma \frac{A_{max}}{t_{max}} \sqrt[\gamma]{1 - \frac{A}{A_{max}}} \quad \text{mit } \gamma' = \gamma/(\gamma - 1) > 1$$

Bei gleicher initialer Aufladerate $A'(0) = 1/\tau'_a(0) = P_a(0) = c_a$ verlängert sich bei diesen Modellen die Dauer t_{max} bis zur Aufladung auf A_{max} um den Faktor γ gegenüber dem linearen Modell $\tau_a(A) = c_a A$.

Kalibrierung auf Daten des Tesla Model S: Beim Supercharging des Tesla Mod. S würde man bei konstanter Ladeleistung mit dem nominellen Wert von $P_a = 1/c_a = 120$ kW für die vollständige Aufladung der Batterie auf $A_{max} = 90$ kWh die Zeit $t_{max} = 90\text{kWh}/120\text{kW} = \frac{3}{4}h$ benötigen. Die tatsächliche Dauer für die vollständige Aufladung wird von Tesla auf $t_{max} = \frac{5}{4}h$ beziffert, was einem Exponenten von $\gamma = \frac{5}{3}$ entsprechen würde (sofern die nominale die initiale Aufnahmeleistung darstellt). Nimmt man an, dass die Angaben geschönt sind und $t_{max} = 1.5$ Stunden für die volle Aufladung anzusetzen sind, ergäbe sich exakt $\gamma = 2$. Hierbei hätte man in der halben Zeit, nach 45 Minuten, eine Aufladung auf 75% der vollen Kapazität, wogegen Tesla angibt, die Batterie sei nach 40 Minuten bereits zu 80% aufgeladen. Bei Kalibrierung auf $A/A_{max} = 0.8$ bei $t/t_{max} = 40/75$ ergibt sich allerdings mit $\hat{\gamma} = \ln(1 - A/A_{max})/\ln(1 - t/t_{max}) = 2.11$ kaum ein Unterschied zu $\gamma = 2$. Im Folgenden gehen wir daher davon aus, dass das Quadratwurzelmodell für $\tau_a(A)$ (Modell mit $\gamma = 2$) adäquat ist. \square

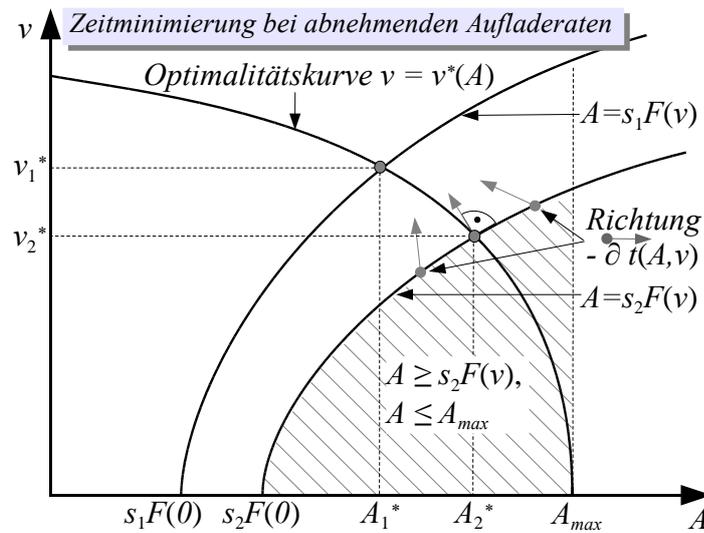
Das Optimierungsproblem, das in diesem Abschnitt behandelt werden soll, lautet nun:

$$\min_{A, v: A \geq sF(v), A \leq A_{max}, v > 0} t(A, v) := \tau_a(A) + \frac{s}{v} - \tau_e(A - sF(v))$$

Wir behandeln also gleich die Situation, dass die Restladung $E = A - sF(v)$ der Batterie am Ende der Strecke einen Zeitvorteil von $\tau_e(A - sF(v))$ für die nächste Strecke bringt. Für die Funktion τ_e unterstellen wir den gleichen Typ wie für τ_a , z.B. wäre $\tau_e(E) = \tau_a((1 - \delta)E)$ denkbar, wobei $\delta \in [0, 1]$ eine Verlustrate darstellt. (Diese funktionale Form soll hier aber nicht von vorneherein unterstellt werden). Die Restriktion $A \geq sF(v)$ stellt sicher, dass mindestens so viel Energie geladen wird, wie für die Strecke s benötigt wird.

Die Lösung des Problems, die im folgenden Satz beschrieben wird, soll zunächst anhand eines Diagramms erläutert werden, da die graphische Lösung einfacher als die algebraische ist: Unter einer Bedingung an die Funktion $\tau_e(E)$, die i.W. sicherstellt, dass nicht mehr Energie aufgenommen wird

als zufließt, spielt τ_e für die Lage der Minimalstelle überhaupt keine Rolle. Der Grund ist, dass unter dieser Bedingung die Restriktion $sF(v) \leq A$ in der Lösung immer bindet (d.h. dass es optimal ist, die Batterie leer zu fahren) und $\tau_e(A - sF(v))$ bei bindender Restriktion $A = sF(v)$ nicht mehr variiert (nämlich konstant = $\tau_e(0)$ ist). Dies geklärt, gibt es in der (A, v) -Ebene eine „Optimalitätskurve“ $v = v^*(A)$, die weder von s noch von τ_e abhängt, auf der sich die Lösung des Problems findet, indem man sie mit der bindenden Restriktionskurve $\{sF(v) = A\}$ schneidet. Ein solcher Schnittpunkt existiert für jeden Wert von s , der überhaupt in Frage kommt (solche mit $sF(0) \leq A_{max}$, bei denen also nicht bereits der Grundverbrauch $sF(0)$ größer als die Batteriekapazität A_{max} ist), da die Funktion $v^*(A)$ monoton fallend von einem initialen Wert $v_{max}^* > 0$ bei $A = 0$ auf $v_{min}^* = 0$ bei $A = A_{max}$ fällt, wogegen die durch $sF(v) = A$ definierten Kurven, als Funktionen $v = v_{exh}(A)$ dargestellt, monoton wachsend sind, beginnend bei $(A = sF(0), v = 0)$. Man kann also – zumindest graphisch – die Lösung (und zwar für jede Streckenlänge s) auf einfache Weise ablesen, ist erst einmal $v^*(A)$ ermittelt.



Satz 3: *Unter den Voraussetzungen:*

- $\tau_a : [0, A_{max}] \rightarrow [0, t_{max}]$ ist eine stetige, strikt konvex wachsende Funktion, die auf $[0, A_{max})$ stetig differenzierbar ist mit $\lim_{A \rightarrow A_{max}} \tau'_a(A) = \infty$ [D.h. für $P_a(A) := 1/\tau'_a(A)$ gilt: $P_a(A_{max}) = 0$]
- $\tau_e : [0, A_{max}] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige auf $[0, A_{max})$ stetig differenzierbare Funktion mit $\tau'_e(E) < \tau'_e(A)$ für alle (E, A) mit $0 \leq E < A < A_{max}$ [D.h. $P_e(E) > P_a(A)$ für $E < A$]
- $F(v)$ ist eine für $v \geq 0$ definierte glatte Funktion mit $F(0) > 0, F'(v) > 0, F''(v) \geq 0$;
- $sF(0) \leq A_{max}$ (Diese Bedingung stellt nur sicher, dass die zulässige Menge nicht leer ist)

hat das Problem

$$\min_{A, v: sF(v) \leq A \leq A_{max}, v > 0} t(A, v) := \tau_a(A) + \frac{s}{v} - \tau_e(A - sF(v))$$

eine eindeutig bestimmte Lösung (A^*, v^*) , die einerseits auf der durch $sF(v) = A$ definierten Kurve in der (A, v) -Ebene liegt, andererseits auf der durch folgende Gleichung definierten Kurve:

$$v^2 \cdot F'(v) = P_a(A) \quad [P_a(A) = 1/\tau'_a(A) \text{ stellt die Aufladerate bei Batterieladung } A \text{ dar}]$$

Durch diese Gleichung wird eine auf $[0, A_{max})$ streng monoton fallende Funktion $v^*(A)$ definiert. Bezeichnet $v_{cP_a}^*(P_a)$ die Umkehrfunktion von $v \rightarrow v^2 F'(v)$, so ergibt sich $v^*(A)$ als $v_{cP_a}^*(P_a(A))$, was gerade die optimale Geschwindigkeit des Zeitminimierungsproblems mit der konstanten Aufladerate $P_a = P_a(A)$ (d.h. $\tau_a(A) = c_a A$ mit konstantem $c_a = 1/P_a$) darstellt. In den Randpunkten gilt:

$$v^*(0) = v_{cP_a}^*(P_a(0)) =: v_{max}^*, \quad v^*(A_{max}) = v_{cP_a}^*(P_a(A_{max})) = v_{cP_a}^*(0) = 0 =: v_{min}^*$$

Beispiel: Der Satz soll anhand von $F(v) = \alpha + \beta v^2$, $\tau_a(A) = t_{max} [1 - \sqrt{1 - \frac{A}{A_{max}}}]$ erläutert werden. Allgemein entsteht die Fkt. $v^*(A)$ durch Lösen der Gl. $v^2 F'(v) = P_a(A)$ nach v bei gegebenem A . Dies ist gerade die Bestimmungsgleichung für das v^* eines Problems mit *konstanter* Aufladungsrate $P_a = P_a(A)$. D.h. um $v^*(A)$ zu bekommen, löst man das Problem mit einer konstanten Aufladungsrate P_a als Parameter und setzt dann das konkrete $P_a(A)$ für P_a ein. Hier ist die Funktion $v_{cP_a}^*(P_a)$ (Umkehrfunktion von $v \rightarrow v^2 F'(v) = 2\beta v^3$) durch $v_{cP_a}^*(P_a) = \sqrt[3]{P_a/(2\beta)}$ gegeben. Für die Aufladerate $P_a(A) = \frac{1}{\tau'_a(A)}$ erhält man hier:

$$\tau'_a(A) = \frac{t_{max}}{2A_{max}} \sqrt{1 - \frac{A}{A_{max}}} \Rightarrow P_a(A) = \frac{1}{\tau'_a(A)} = \frac{2A_{max}}{t_{max}} \cdot \sqrt{1 - \frac{A}{A_{max}}}$$

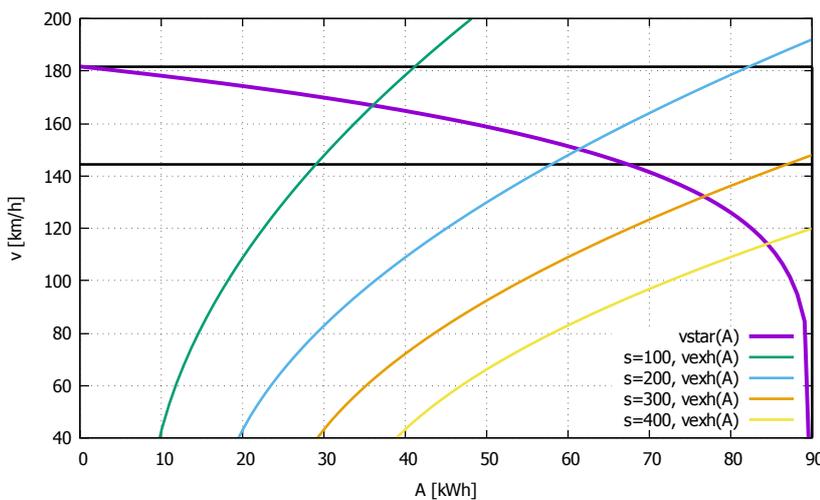
Durch Einsetzen von $P(A)$ in $v_{cP_a}^*(P_a)$ ergibt sich:

$$v^*(A) = \sqrt[3]{\frac{1}{2\beta} \frac{2A_{max}}{t_{max}} \sqrt{1 - \frac{A}{A_{max}}}} = \sqrt[3]{\frac{P_a(0)}{2\beta}} \sqrt[6]{1 - \frac{A}{A_{max}}} \quad \text{mit} \quad P_a(0) = 2 \frac{A_{max}}{t_{max}} = \frac{A_{max}}{t_{max}/2}$$

Hierbei ist $P_a(0)$ die initiale Aufladerate. Wäre sie konstant (wie beim linearen Modell $\tau_a(A) = A/P_a$) und nicht abnehmend, würde man die halbe Zeit für die volle Aufladung benötigen. Der Faktor $\frac{1}{2}$ bzw. 2 resultiert dabei aus der Verwendung des *Quadratwurzelmodells*. Die Größe $v^*(0) = \sqrt[3]{\frac{P_a(0)}{2\beta}}$ ist gerade die optimale Geschwindigkeit, die man bei einem linearen Modell mit der initialen als der permanenten Aufladerate bekommt, und es gilt

$$v^*(A) = v^*(0) \sqrt[6]{1 - \frac{A}{A_{max}}} \quad \text{mit} \quad v^*(0) = \begin{matrix} \text{Optimales } v \text{ eines linearen Modells } \tau_a^{lin}(A) = A/P_a(0) \\ \text{mit dem initialen } P_a(0) \text{ als permanenter Aufladerate} \end{matrix}$$

Trotz dieser recht einfachen Form der Funktion $v^*(A)$ erweist sich die algebraische Bestimmung der Lösung (A^*, v^*) zu einer gegebenen Streckenlänge s als erstaunlich kompliziert. Man kann z.B. versuchen, die Gleichung $v^*(sF(v)) = v$ nach v aufzulösen, was auf eine Gleichung 6-ten Grades in v führt. Zwar lässt sich diese durch Substitution $u = v^2$ in eine Gleichung dritten Grades für u verwandeln, für die es geschlossene Lösungsformeln gibt, allerdings werden diese Formeln derart unanschaulich, dass sie hier gar nicht erst angegeben werden sollen. Demgegenüber ist die graphische Lösung wesentlich anschaulicher. Das folgende Diagramm zeigt die Lösung für Strecken der Länge $s = 100\text{km}$, $s = 200\text{km}$, $s = 300\text{ km}$ und $s = 400\text{km}$ mit den Daten des Tesla Mod. S an einer „Supercharging“-Station:



Verwendete Daten:

$A_{max} = 90 \text{ kWh}$,
 $t_{max} = 1.5\text{h}$,
 $P_a(0) = 2 \frac{A_{max}}{t_{max}} = 120 \text{ kW}$

Modell für Aufladerate:
 Quadratwurzel ($\gamma = 2$)

Modell für Verbrauch/Strecke:
 $F(v) = \alpha + \beta v^2$ mit
 $\alpha = 8.1235 \text{ kWh}/100\text{km}$,
 $\beta = 0.0010 \text{ kWh}/100\text{km}/[\text{km}/\text{h}]^2$

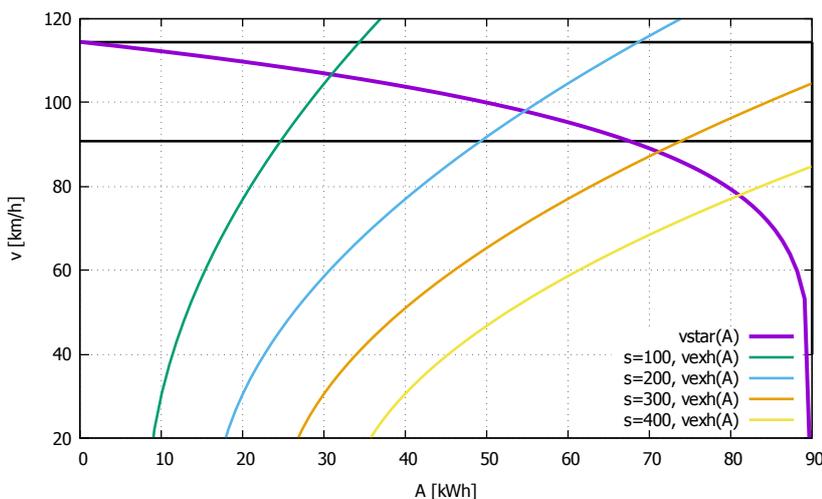
Da das Modell mit $P_a(0)$ (=120 kW beim Supercharging) als konstanter Aufladerate nur halb so viel Zeit (hier: 45 Minuten) für die volle Aufladung (hier auf $A_{max} = 90 \text{ kWh}$) benötigt wie das Modell mit abnehmender Aufladerate $P_a(A)$, ist als Bezugslinie auch noch die optimale Geschwindigkeit $v_{cP_a}^*(P_a)$ eines Modells mit konstanter Aufladerate P_a eingetragen, das die gleiche Aufladezeit t_{max} für A_{max} benötigen würde, wo also $P_a = \frac{1}{2} P_a(0)$ (hier: 60 kW). Wir nennen dies das lineare Referenzmodell ('referriert' wird dabei eine äquivalente Charakteristik für die volle Aufladung). Die Streckenlänge s , bei der sich das lineare Referenzmodell und das nicht-lineare Modell schneiden (sie liegt hier bei etwa

240 km), ist der Abstand zwischen den Stationen, unterhalb dessen die hohen initialen Aufladeraten des nicht-linearen Modells voll zum Zuge kommen: Die Batterie wird hier zwar höher als beim linearen Referenzmodell aufgeladen (was relativ – zum Ref.Mod. – schnell geht), dafür wird aber auch schneller gefahren. Die Aufladung der Batterie bleibt dabei weit unter ihrer Kapazität (eben in dem Bereich, wo sie relativ schnell aufgeladen werden kann). Beispielsweise wird bei $s = 100$ km die Batterie nur auf ca. 36 kWh der potentiellen 90 kWh aufgeladen, was oberhalb der optimalen Auflademenge des linearen Referenzmodells von ca. 28 kWh liegt, aber auch ein Fahren mit der hohen Geschwindigkeit von ca. 180 km/h ermöglicht, wogegen das Referenzmodell „nur“ auf ca. 142 km/h kommt.

Für Streckenlängen oberhalb der Referenzlänge (hier von ca. 240 km) bewegt man sich in den Bereich, wo die relativ kleinen Aufladeraten, die bei bereits gut gefüllter Batterie auftreten, nicht mehr vermieden werden. Hier werden mit dem nicht-linearen Modell sowohl Auflademengen als auch Geschwindigkeiten unterhalb denen des Referenzmodells optimal. Beispielsweise sollte nach dem nicht-linearen Modell bei einer Strecke von $s = 300$ km die Batterie auf ca. 76 kWh (ca. 85% der 90 kWh) aufgeladen werden und mit einer Geschwindigkeit von ca. 130 km/h gefahren werden. Das Referenzmodell bleibt bei seiner Geschwindigkeit von 142 km/h, wozu die Batterie fast vollständig aufgeladen werden muss.

Bei Streckenlängen weit oberhalb der Referenzlänge kommt es zu einer erneuten Annäherung der Ergebnisse von nicht-linearem Modell und linearem Referenzmodell. Bei beiden hängen die optimalen Geschwindigkeiten dann sehr empfindlich von der Streckenlänge ab (und beide laden die Batterie fast vollständig oder ganz auf). Die starke Empfindlichkeit, mit der die optimale Geschwindigkeit auf Änderungen der Streckenlänge reagiert, wenn diese groß sind, hängt beim nicht-linearen Modell mit der Singularität der Funktion $P_a(A) = P_a(0)\sqrt{1 - A/A_{max}}$ bzw. $v^*(A) = v^*(0)\sqrt[6]{1 - A/A_{max}}$ bei $A = A_{max}$ zusammen: Die Ableitung nach A wird dort unendlich groß.

Im folgenden Diagramm wurde sowohl die Aufladezeit t_{max} zum Erreichen von $A_{max} = 90$ kWh als auch der Koeffizient β verdoppelt. Die initiale Aufladerate $P_a(0)$ reduziert sich damit auf 60 kW, was in etwa der nominellen Ladeleistung von 50 kW an einer „Öffentlichen Chademo-Ladestation“ entspricht. Die Verdoppelung von β soll reflektieren, dass der nominelle Energieverbrauch, wenn überhaupt, dann nur unter Idealbedingungen erreicht wird. Qualitativ entspricht dieses Diagramm dem vorhergehenden, allerdings sind nun wesentlich geringere Geschwindigkeiten beim Fahren optimal. Zum Beispiel ist für eine Strecke von 200 km nun eine Geschwindigkeit von knapp 100 km/h beim Modell mit abnehmenden Aufladeraten optimal. Die eigentliche Fahrtzeit beträgt dabei also gut 2 Stunden. Aufgeladen werden ca. $A = 55$ kWh, was $\tau_a(A) = \sqrt{1 - 55/90} \cdot t_{max} = 0.62 \cdot 3\text{h} = 1.86$ Stunden dauert.



Verwendete Daten:

$$A_{max} = 90 \text{ kWh},$$

$$t_{max} = 3\text{h},$$

$$P_a(0) = 2 \frac{A_{max}}{t_{max}} = 60 \text{ kW}$$

Modell für Aufladerate:

Quadratwurzel ($\gamma = 2$)

Modell für Verbrauch/Strecke:

$$F(v) = \alpha + \beta v^2 \text{ mit}$$

$$\alpha = 8.1235 \text{ kWh}/100\text{km},$$

$$\beta = 0.0020 \text{ kWh}/100\text{km}/[\text{km}/\text{h}]^2$$

Beweis von Satz 3: Der Beweis ist leider ziemlich technisch, aus zwei Gründen: Zum einen ist ohne sehr einschränkende Annahmen an die Funktion τ_e (z.B. dass sie konkav, nicht wie τ_a konvex ist) nicht sicherzustellen, dass die Zielfunktion $t(A, v)$ konvex ist. Der Beweis muss also ohne Annahmen über das Krümmungsverhalten von τ_e geführt werden. Zum anderen ist die Zielfunktion bei $A = A_{max}$ zwar stetig, aber nicht stetig differenzierbar, da sie eine unendlich große partielle Ableitung nach A entwickelt.

Zunächst folgt mit einer Variante des Satzes von Weierstraß, dass die auf $\mathcal{D} = \{(A, v) : v > 0, sF(v) \leq A \leq A_{max}\}$ nach unten beschränkte, stetige Funktion $t(A, v) = \tau_a(A) + s/v - \tau_e(A - sF(v))$ ihr Minimum dort annimmt. Es kann nicht in einem Punkt $(A, v) \in \mathcal{D}$ mit $A > sF(v)$ angenommen werden, denn $\frac{\partial t}{\partial A} = \tau'_a(A) - \tau'_e(A - sF(v)) > 0$ gemäß Annahme, so dass man, wenn $A > sF(v)$ wäre, eine Verkleinerung von $t(A, v)$ durch Beibehaltung von v und Reduktion von A auf $A = sF(v)$ erreichen könnte. Dieses einfache Argument greift auch, wenn als Ausgangspunkt $A = A_{max}$ betrachtet wird, denn allgemein gilt folgendes (trivial anmutende):

Lemma: Eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige, auf (a, b) diff.bare Funktion f mit $\lim_{x \rightarrow b} f'(x) = \infty$ nimmt ihr Minimum (in $[a, b]$, aber) nicht in b an.

Beweis: Da f stetig in b , gilt $f(b) - f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(b - \varepsilon) - f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_x^{b-\varepsilon} f'(\xi) d\xi = \int_x^b f'(\xi) d\xi$. Da $\lim_{\xi \rightarrow b} f'(\xi) = \infty$, existiert $\delta > 0$ mit $f'(\xi) \geq K > 0 \forall \xi \in [b - \delta, b)$. Es folgt $f(b) \geq f(b - \delta) + K \cdot \delta > f(b - \delta)$.

In der Lösung bindet also die Restriktion $A = sF(v)$ und man kann die Lösung ermitteln, indem man die Funktion

$$h(v) := t(sF(v), v) = \tau_a(sF(v)) + s/v - \tau_e(0)$$

über die Menge $\{v > 0 : sF(v) \leq A_{max}\}$ minimiert. Diese Menge ist offensichtlich ein linksseitig offenes Intervall $(0, b]$ ($b = F^{-1}(A_{max}/s)$). Im Inneren gilt

$$\begin{aligned} h'(v) &= \tau'_a(sF(v)) \cdot sF'(v) - \frac{s}{v^2} \\ h''(v) &= \tau''_a(sF(v)) \cdot (sF'(v))^2 + \tau'_a(sF(v)) \cdot sF''(v) + \frac{2s}{v^3} \end{aligned}$$

Aus $\lim_{A \rightarrow A_{max}} \tau'_a(A) = \infty$ folgt $\lim_{v \rightarrow b} h'(v) = \infty$, so dass das Minimum von h über $(0, b]$ nicht im rechten Randpunkt b angenommen werden kann (erneute Anwendung des obigen Lemmas) und wir uns für die Minimierung von h auf das offene Intervall $(0, b)$ beschränken können. Unter den Annahmen des Satzes ist dort $h''(v) > 0$, so dass h eine konvexe Funktion auf $(0, b)$ ist. Sofern die Gl. $h'(v) = 0$ eine zulässige Lösung in $(0, b)$ hat, ist damit das minimierende v^* gefunden. Das führt auf folgende Gleichung:

$$h'(v) = 0 \iff s v^2 \tau'_a(sF(v)) F'(v) = s \iff v^2 F'(v) = 1/\tau'_a(sF(v))$$

Um die eindeutige Lösbarkeit dieser Gleichung (mit einer Lösung $v^* > 0$, so dass $sF(v^*) < A_{max}$) zu zeigen, lesen wir sie als ein System von zwei Gleichungen in den beiden Unbekannten A, v :

$$v^2 F'(v) = 1/\tau'_a(A), \quad sF(v) = A$$

Durch die erste Gleichung ist implizit eine streng monoton fallende Fkt. $v^* : [0, A_{max}] \rightarrow [v_{max}^*, v_{min}^*]$ definiert. Indem wir nämlich $1/\tau'_a(A) = P_a(A)$ beachten, ist $v^*(A) = v_{cP_a}^*(P_a(A))$ mit der Funktion $P_a \rightarrow v_{cP_a}^*(P_a)$ aus Satz 1, die streng monoton von 0 auf ∞ wächst, während $A \rightarrow P_a(A)$ annahmegemäß streng monoton von $P_a(0)$ auf $P_a(A_{max}) = 0$ fällt. Zusammengefasst ist $v^*(A)$ eine streng monoton fallende Funktion von $v_{max}^* = v_{cP_a}^*(P_a(0))$ bei $A = 0$ auf $v_{min}^* = 0$ bei $A = A_{max}$.

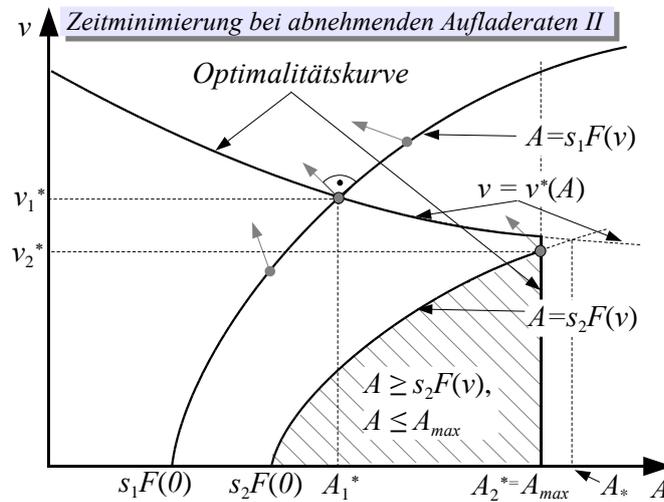
Zurück zum Gleichungssystem $v^2 F'(v) = 1/\tau'_a(A)$, $sF(v) = A$, ist nur noch zu beachten, dass durch $sF(v) = A$ ebenfalls eine (stetige) Kurve in der (A, v) -Ebene definiert wird, die als Funktion von A dargestellt streng monoton wachsend über dem Intervall $[sF(0), A_{max}]$ verläuft. Formelmäßig ist diese Funktion durch $v_{exh}(A) = F^{-1}(A/s)$ für $A \in [sF(0), A_{max}]$ gegeben und inhaltlich gibt $v_{exh}(A)$ diejenige Geschwindigkeit an, die man bei gegebener Aufladung A verwenden muss, um die Batterie auf der Strecke s gerade leer zu fahren. Da $v_{exh}(sF(0)) = 0 = v^*(A_{max})$, existiert ein Schnittpunkt (A^*, v^*) des (wachsenden) Funktionsgraphen von $v_{exh}(A)$ mit dem (fallenden) Funktionsgraphen von $v^*(A)$ genau dann, wenn $sF(0) \leq A_{max}$, d.h wenn die zulässige Menge nicht leer ist. In diesem Fall stellen die Koordinaten (A^*, v^*) des Schnittpunktes die Lösung des Minimierungsproblems dar. \square

Ergänzungen zu Satz 3: Unter den Voraussetzungen von Satz 3 gilt in der Lösung des Problems:

1. Die Restriktion $A = sF(v)$ bindet immer, d.h. es ist stets optimal, die Batterie vollständig leer zu fahren (gerade so viel aufzuladen, wie für die Strecke s mit der Geschwindigkeit v^* benötigt wird).

2. Die Restriktion $A = A_{max}$ bindet niemals, d.h. es ist nie optimal, die Batterie vollständig zu laden.

Die zweite Aussage hängt an der Bedingung $\lim_{A \rightarrow A_{max}} \tau'_a(A) = \infty$, d.h. $P_a(A_{max}) = 0$,⁶ die dafür sorgt, dass $v^*(A)$ für $A \rightarrow A_{max}$ auf Null abfällt. Ist sie nicht erfüllt, d.h. ist $P_a(A_{max}) = P_{min} > 0$, endet die Optimalitätskurve $v^*(A)$ im Punkt (A_{max}, v_{min}^*) mit $v_{min}^* = v_{cPa}^*(P_{min}) > 0$ und die Wahl $A = A_{max}$ kann optimal werden. Wie bei konstanten Aufladeraten definiert sich die Lösung dann dadurch, dass beide Restriktionen binden, d.h. $A^* = A_{max}$ und $v = v^*$ aus $sF(v) = A_{max}$. Die Lösung kann man wie in Satz 2 bestimmen: Zunächst wird der Schnittpunkt (v_*, A_*) der Optimalitätskurve $v^*(A) = v_{cPa}^*(P_a(A))$ mit der „Leerfahrkurve“ $\{A = sF(v)\}$ bestimmt und dann abhängig davon, ob $A_* > A_{max}$ od. $A_* \leq A_{max}$, entschieden. ($P_a(A)$ muss dazu fallend über A_{max} hinaus fortgesetzt werden):



Korollar zu Satz 3: Wenn, unter ansonsten gleichen Annahmen wie in Satz 3, $P_a(A_{max}) = P_{min} > 0$, ergibt sich die Lösung des Problems wie folgt: Man setzt $P_a(A)$ stetig und fallend über A_{max} hinaus fort und bestimmt die Lösung (A_*, v_*) des Problems ohne die Restriktion $A \leq A_{max}$ wie in Satz 3. Wenn $A_* < A_{max}$, ist $A^* = A_*$, $v^* = v_*$, ansonsten ist $A^* = A_{max}$ und v^* bestimmt sich aus $sF(v^*) = A_{max}$.

Beweis mit Kuhn/Tucker-Theorie: Die Lagrange-Funktion des Problems lautet:

$$L(A, v; \lambda, \mu) = -\tau_a(A) - \frac{s}{v} + \tau_e(A - sF(v)) + \lambda \cdot (A - sF(v)) - \mu \cdot (A - A_{max})$$

Die Kuhn/Tucker-Bedingungen lauten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial A} = -\tau'_a(A) + \tau'_e(A - sF(v)) + \lambda - \mu \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial v} = +\frac{s}{v^2} - (\tau'_e(A - sF(v)) + \lambda) sF'(v) \end{aligned} \iff \begin{aligned} \tau'_a(A) + \mu &= \tau'_e(A - sF(v)) + \lambda \\ v^2 F'(v) &= 1/[\tau'_e(A - sF(v)) + \lambda] \end{aligned} \Rightarrow v^2 F'(v) = \frac{1}{\tau'_a(A) + \mu}$$

mit $\lambda \geq 0$, $A \geq sF(v)$ und $\lambda \cdot (A - sF(v)) = 0$ sowie $\mu \geq 0$, $A \leq A_{max}$ und $\mu \cdot (A - A_{max}) = 0$.

Aus $\mu \geq 0$ und $\tau'_a(A) > \tau'_e(E)$ für $E := A - sF(v)$ folgt $\lambda = \tau'_a(A) - \tau'_e(E) + \mu > 0$, so dass in einem KT-Punkt $A = sF(v)$ gelten muss. Die beiden Lagrange-Bedingungen zeigen: $v^2 F'(v) = \frac{1}{\tau'_a(A) + \mu}$.

ANMERKUNG: Wenn $A < A_{max}$ muss $\mu = 0$ sein, und dann ergeben sich bereits an dieser Stelle die beiden Gleichungen $sF(v) = A$, $v^2 F'(v) = P_a(A)$. Der Rest des Beweises ist mehr oder weniger Technik.

Sei (A_*, v_*) der (eindeutig bestimmte) Schnittpkt der durch $A = sF(v)$ und $v^2 F'(v) = \frac{1}{\tau'_a(A)}$ definierten Kurven. Diese Kurven sind auch durch $v = F^{-1}\left(\frac{A}{s}\right)$ (wachsend) u. $v = v_{cPa}^*\left(\frac{1}{\tau'_a(A)}\right)$ (fallend) gegeben.

⁶Man könnte sagen, dass sich dabei A_{max} durch $P_a(A_{max}) = 0$ definiert, was physikalisch Sinn machen würde.

Wenn $A_* < A_{max}$, dann ist (A_*, v_*) ein KT-Punkt mit $\lambda = \tau'_a(A_*) - \tau'_e(0) > 0$, $\mu = 0$. Es gibt keine weiteren, da entweder $\mu = 0$ – und dann ist es dieser Punkt – oder $\mu > 0$, und dann ist $A = A_{max}$.

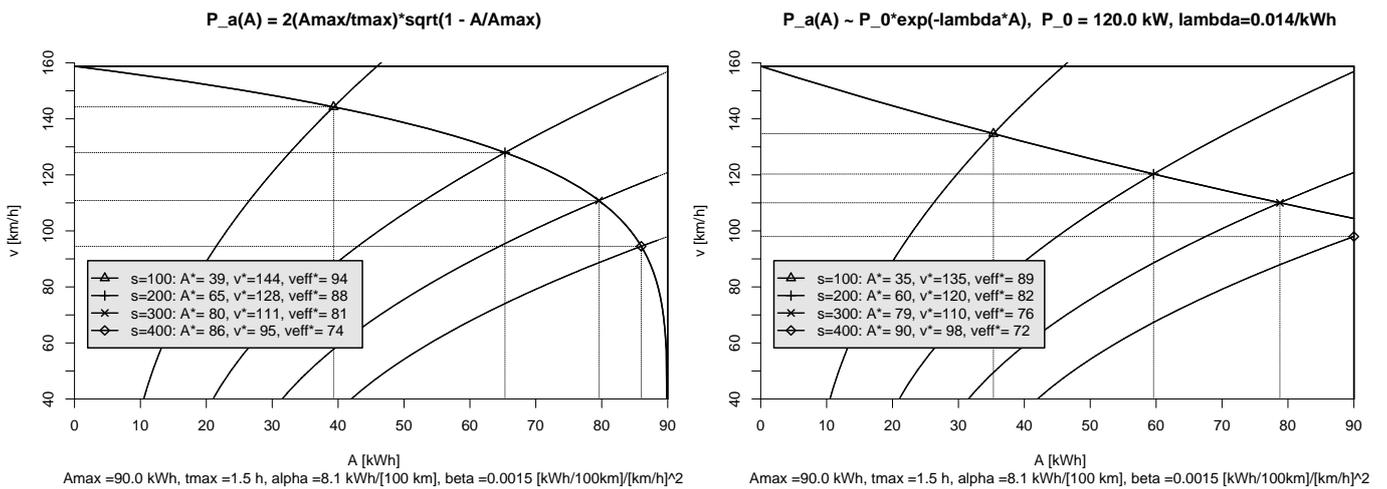
Wenn $A_* \geq A_{max}$, muss $v_{cPa}^* \left(\frac{1}{\tau'_a(A_{max})} \right) \geq F^{-1} \left(\frac{A_{max}}{s} \right)$ sein. Es existiert dann ein eindeutig bestimmtes $\mu \geq 0$, so dass $v_{cPa}^* \left(\frac{1}{\tau'_a(A_{max}) + \mu} \right) = F^{-1} \left(\frac{A_{max}}{s} \right)$. Mit diesem μ und $\lambda = \tau'_a(A) + \mu - \tau'_e(0) > 0$ liegt dann ein (eindeutig bestimmter) KT-Punkt bei $A = A_{max}$, $v = v_{cPa}^* \left(\frac{1}{\tau'_a(A_{max}) + \mu} \right)$.

In jedem Fall qualifiziert sich also genau ein KT-Punkt als Lösung des Problems. Da (ohne sehr einschränkende Bedingungen an die Funktion τ_e) nicht sichergestellt werden kann, dass die Zielfunktion konvex ist, kann hier nicht mit der üblichen hinreichenden Bedingung (dass die Lagrange-Funktion konkav in (A, v) ist) darauf geschlossen werden, dass der KT-Punkt die Lösung des Optimierungsproblems darstellt (denn im Allgemeinen sind die KT-Bedingungen nur notwendig, nicht hinreichend). Man kann aber folgendermaßen argumentieren: Das Minimierungsproblem muss eine Lösung haben, da eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Minimum annimmt. Da die KT-Bedingungen notwendig sind, muss der (jeweils eindeutig bestimmte) KT-Punkt diese Lösung darstellen. \square

Beispiel: Wenn die Aufladerate $P_a(A)$ ihrerseits mit einer konstanten Rate λ abklingt, erhält man das **exponentielle Modell**

$$P_a(A) = P_0 e^{-\lambda A} \Rightarrow \tau_a(A) = \int_0^A 1/P_a(x) dx = \frac{1}{P_0} \int_0^A e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda P_0} (e^{\lambda A} - 1)$$

Beim „Tesla Model S“ mit „Supercharging“ ist $P_0 = 120$ kW. Kalibrierung von λ auf $\tau_a(A_{max}) = t_{max}$ mit $A_{max} = 90$ kWh und $t_{max} = 1.5$ h liefert $\lambda \approx 0.014$ /kWh (d.h. mit jeder kWh an aufgenommener Batterieladung sinkt die Aufladeleistung um 1.4%). Mit diesen Werten erreicht man nach 45 Minuten eine Aufladung von 58.3 kWh, was ca. 65% der Batteriekapazität von $A_{max} = 90$ kWh entspricht. Die Übereinstimmung mit den Angaben von Tesla (80% nach 40 Minuten) ist eher schlechter als beim Quadratwurzelmodell (75% nach 45 Minuten), das bei leerer Batterie eine geringe, bei fast gefüllter Batterie aber eine starke Verringerung der Aufladerate unterstellt (die schließlich so stark abnimmt, dass sie Null wird). Die Lösung des Zeitminimierungsproblems bei $F(v) = \alpha + \beta v^2$ liefert beim exponentiellen Modell für alle Streckenlängen unterhalb von etwa 350 km geringere Aufladungen und geringere Geschwindigkeiten als beim Quadratwurzelmodell (siehe auch nachstehenden ‘Zusatz’):



Zusatz: Einige der Aussagen, die in Satz 1 für die Funktion $v_{cPa}^*(P_a)$ getroffen wurden, übertragen sich auf $v^*(A)$. Z.B. erhält man durch Differentiation der definierenden Gl. $P_a(A) = (v^*(A))^2 F'(v^*(A))$ nach A (das Argument A wird auf der re. Seite unterdrückt): $P'_a(A) = [2v^* F'(v^*) + (v^*)^2 F''(v^*)] v^{*'}.$ Erweitert man die rechte Seite mit $v^*(A)$ und setzt die definierende Gleichung erneut ein, entsteht: $P'_a(A) = [2P_a(A) + (v^*)^3 \cdot F''(v^*)] \cdot \frac{v^{*'}(A)}{v^*(A)}$. Mit $F''(v) \geq 0$, $P'_a(A) < 0$ und $v^{*'}(A) < 0$ folgt: $|P'_a(A)| \geq 2P_a(A) \cdot \frac{|v^{*'}(A)|}{v^*(A)}$, oder $\frac{|v^{*'}(A)|}{v^*(A)} \leq \frac{1}{2} \frac{|P'_a(A)|}{P_a(A)}$. Bei $F(v) = \alpha + \beta v^2$ gilt exakt: $\frac{|v^{*'}(A)|}{v^*(A)} = \frac{1}{3} \frac{|P'_a(A)|}{P_a(A)}$. Die Abklingrate von $P_a(A)$ ($=\lambda$) überträgt sich hier nur zu einem Drittel auf diejenige von $v^*(A) \sim e^{(\lambda/3)A}$.

2.4 Dynamisches Modell mit deterministischem Verbrauch

Wir betrachten nun das Problem der Zeitminimierung über n Lade-Fahr-Zyklen hinweg. Zu Beginn der i -ten Etappe wird die Batterie auf die Energiemenge A_i aufgeladen (man beachte: es wird *auf die*, nicht um die Menge A_i aufgeladen), wobei eine eventuell verbliebene Restenergie E_i aus der vorhergehenden Etappe genutzt werden kann. Die Dauer für die Aufladung auf A Energieeinheiten (ausgehend von einer leeren Batterie) beanspruche $\tau_a(A)$ Zeiteinheiten. Wenn in der Batterie bereits E_i Energieeinheiten gespeichert sind, so spart man die Zeit $\tau_a(E_i)$ beim Ladevorgang und dessen Dauer ermittelt sich als $\tau_a(A_i) - \tau_a(E_i)$.⁷ Ladevorgang und Fahrt auf der Strecke s_i mit Geschwindigkeit v_i zusammen beanspruchen also $t(E_i, A_i, v_i) = \tau_a(A_i) - \tau_a(E_i) + s_i/v_i$ Zeiteinheiten. Wenn die Funktion $F(v)$ den Energieverbrauch pro Streckeneinheit bei Fahrgeschwindigkeit v wiedergibt, so bleibt als Restenergie für die nächste Etappe $E_{i+1} = A_i - sF(v_i)$, wobei die Restriktion $A_i \geq sF(v_i)$ sicherstellt, dass E_{i+1} nicht negativ wird. Diese Bedingung tritt neben die Bedingungen $A_i \geq E_i$ (Batterie darf nur auf-, nicht entladen werden), $A_i \leq A_{max}$ (= Batteriekapazität) und natürlich $v_i > 0$. Das Problem, die gesamte Dauer der Fahrt zu minimieren, stellt ein dynamische Optimierungsproblem in den beiden Kontrollvariablen⁸ (A, v) und der Zustandsvariable E mit einer zustandsabhängigen Restriktion dar:

$$\min_{\substack{A_j \geq E_j, A_j \leq A_{max} \\ v_j > 0, A_j \geq s_j F(v_j)}} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \left(\tau_a(A_i) - \tau_a(E_i) + \frac{s_i}{v_i} \right) - \tau_a(E_n) \right\}, \quad \begin{array}{l} E_0 \text{ gegeben u. für } i = 1, \dots, n-1: \\ E_{i+1} = (1 - \delta) \cdot (A_i - s_i F(v_i)) \end{array}$$

Durch das Abziehen von $\tau_a(E_n)$ wird berücksichtigt, dass eine eventuell verbliebene Restenergie nach der letzten Etappe, E_n , eine Zeitersparnis für die *nächste Fahrt* mit dem Fahrzeug (bzw. dessen Batterie) darstellt. Die Größe $\delta \geq 0$ stellt die Verlustrate der gespeicherten Energie beim Übergang zwischen den Etappen dar. Vorstellbar ist, dass solche Energieverluste beim Anschluss an die Ladestation auftreten. Diese Rate dürfte jedoch sehr klein sein und wurde nur eingeführt, um Mehrdeutigkeit der Lösung im Fall konstanter Aufladeraten zu vermeiden. Wenn τ_a streng konvex ist, d.h. bei abnehmenden Aufladeraten, entsteht dieses Problem nicht und δ kann Null gesetzt werden.

Wir betrachten hier nur den Fall, dass alle Etappen gleich lang sind: $s_i = s$, so dass sich die „Kostenstruktur“ in jeder Etappe gleich darstellt („Etappen-Homogenität“) und man erwarten kann, dass eine „stationäre“ Entscheidungsregel der Art „Wähle $A_i = A^*(E_i), v_i = v^*(E_i)$ “ mit von i unabhängigen Funktionen $A^*(E)$ und $v^*(E)$ optimal ist. Wenn die s_i variieren, wie auch bei Etappen-inhomogener Charakteristik des Verbrauchs $F = F_i$ oder der Ladedauer $\tau_a = \tau_{ai}$, ist die im Folgenden verwendete Theorie nicht anwendbar. Denn diese Theorie adressiert gerade eine stationäre Lösung (Gleichgewichtslösung), wie sie sich nur bei stationärer (etappen-homogener) Problemstellung ergeben kann. Bei „instationärer“ Problemstellung dagegen verschiebt sich das Interesse auf einen optimalen Ausgleich zwischen den Etappen (z.B. in kurzen Etappen mehr Energie laden als unbedingt nötig, um mit einer hohen Ausgangsenergie in eine lange Folgeetappe zu gelangen).

Das obige dynamische Optimierungsproblem könnte man mit einer Bellman-Rekursion lösen (vgl. Bertsekas (1976)). Bei der speziellen Struktur des Problems kann man sich dies jedoch sparen, wenn man auf ein Ergebnis zurückgreift, das inhaltlich auf Veinott (1965) bzw. Sobel (1981) zurückgeht. Wir orientieren uns hier an Porteus (2002), Theorem 6.1. Da das Theorem sogar für stochastische dynamische Probleme gilt, und wir seine Anwendbarkeit bei der stochastischen Variante des Problems demonstrieren werden,⁹ soll es hier informell verwendet werden: **Das dynamische Problem lässt sich auf ein statisches Problem (ohne die zustandsabhängige Restriktion, aber) mit Zeitrückgewinnung reduzieren.** Zur Konstruktion der Zielfunktion des statischen Problems

⁷Die Zeit zum Aufladen auf Stand A ausgehend von Stand E beträgt $\tau_a(A) - \tau_a(E)$, nicht etwa $\tau_a(A - E)$. Mit der Aufladerate $P_a(A) := 1/\tau'_a(A)$ lässt sich diese Dauer auch als $\tau_a(A) - \tau_a(E) = \int_A^E \tau'_a(x) dx = \int_A^E dx/P_a(x)$ darstellen.

⁸Diese werden auch als Steuervariablen, Entscheidungsvariablen oder Aktionsvariablen usw. bezeichnet

⁹Die Übertragung läuft darauf hinaus, dass man im stochastischen Modell anstatt eines zufälligen Verbrauchs einen deterministischen ansetzt; die dortigen „Notaufladungen“ werden hier durch die Restriktion $A \geq sF(v)$ ausgeschlossen.

ist die zustandsabhängige Komponente in den „direkten Kosten“ $t(E, A, v) = \tau_a(A) - \tau_a(E) + s/v$, das ist $-\tau_a(E)$, zu ersetzen durch deren Wert im morgigen Zustand $E = (1 - \delta)(A - sF(v))$:

$$\min_{\substack{A \geq 0, A \leq A_{max} \\ v > 0, A \geq sF(v)}} \tau(A, v) = \tau_a(A) + s/v - \tau_a((1 - \delta) \cdot (A - sF(v))) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Restriktion „}A \geq 0\text{“ obsolete,} \\ \text{da schwächer als „}A \geq sF(v)\text{“} \end{array} \right]$$

wobei die zustandsabhängige Restriktion $\{A \geq E\}$ ersetzt wurde durch die Vereinigung der Restriktionen $\{A \geq E\}$ über alle Zustände E des Zustandsraums, für den man hier $\mathcal{S} = [0, A_{max}]$ nehmen kann. Mit anderen Worten: Diese Restriktion entfällt (hier). An die Stelle dieser Restriktion tritt eine Konsistenzbedingung, die gleichzeitig die stationären Zustände E^* im Optimum charakterisiert: Optimalerweise befindet sich das System in einem Zustand E^* , den die Zustandsdynamik, hier $E = (1 - \delta)(A - sF(v))$, bei den minimierenden A^*, v^* des statischen Ersatzproblems reproduziert. Diese Lösung des dynamischen Problems (mit Etappen- und Zustands-unabhängigen (A^*, v^*)) bezieht sich nur auf die Situation, dass man sich initial, hier mit E_0 , bereits in einem konsistenten (= stationären = Gleichgewichts-) Zustand befindet. Ansonsten treten i.d.R. „Einschwingvorgänge“ des gesteuerten Prozesses E_i^* auf, die solange andauern, bis der Prozess in einem konsistenten Zustand absorbiert. Implizite Voraussetzung dabei war, dass überhaupt konsistente – sich bei Steuerung mit (A^*, v^*) reproduzierende – Zustände existieren. Natürlich muss, damit es sich um einen legitimen konsistenten Zustand handelt, auch sichergestellt sein, dass aus ihm heraus die minimierenden A^*, v^* des Ersatzproblems zulässig sind (was nur die zustandsabhängigen Restriktionen, hier $A \geq E$, tangiert). Sofern anwendbar, führt die „Theorie der konsistenten Zustände“ in der Regel schneller zum Ziel als der Weg über die Optimalwertfunktionen der Bellman-Rekursion, da man bei der Bellman-Rekursion den Optimalwert auch in inkonsistenten Zuständen ermittelt (was oft gar nicht interessiert).

Wenn wir diese Theorie auf das dynamische Zeitminimierungsproblem anwenden, dann stellt sich heraus, dass wir dieses schon gelöst haben. Denn indem wir $\tau_e(E) := \tau_a((1 - \delta)E)$ setzen, lautet das äquivalente statische Problem

$$\min_{v > 0; A \leq A_{max}; A \geq sF(v)} \tau(A, v) = \tau_a(A) + s/v - \tau_e(A - sF(v))$$

Im Fall eines (streng) konvexen $\tau_a(A)$ gilt sicher $\tau'_a(A) > \tau'_e(E)$ für $A > E$, selbst wenn $\delta = 0$, so dass Satz 3 die Lösung dieses Problems beschreibt. Nach Satz 3 ist die Lösung sogar vollkommen unabhängig von δ (solange $\delta \geq 0$, d.h. solange keine wundersame Energievermehrung stattfindet, sprich die Hauptsätze der Thermodynamik gelten). Damit die Lösung des statischen Problems die Lösung des dynamischen Problems ergibt, muss ein konsistenter Zustand E^* existieren. Als solcher kommt nur $E^* = 0$ in Frage, denn bei der Lösung des statischen Problems wird die Auflademenge A^* ja gerade so bestimmt, dass die Batterie bei Geschwindigkeit v^* leer gefahren wird ($A^* = sF(v^*)$ gilt), so dass man immer mit $E_{i+1} = (1 - \delta)(A^* - sF(v^*)) = 0$ in die nächste Etappe geht und das einzige E_i , das sich nach der statischen Optimierung reproduziert, durch $E_i = 0$ gegeben ist. Dieses E^* erfüllt auch alle anderen Bedingungen eines konsistenten Zustands (z.B. ist immer $A^* \geq E^*$). Man muss mit $E_0 = 0$, d.h. mit leerer Batterie, starten, dann beschreibt Satz 3 bereits die Lösung des dynamischen Problems.

Die Behandlung des Problems mit konstanten Aufladeraten ist vollkommen analog (wir wenden Satz 2 statt 3 an) – solange $\delta > 0$. Wenn $\delta = 0$, ist $c_e = (1 - \delta)c_a = c_a$, so dass A ganz rausfällt aus der Zielfunktion des statischen Ersatzproblems. Zwar ist v^* nach wie vor als $v^* = v_{cPa}^*(1/c_a)$ festgelegt, aber A^* kann beliebig zwischen $sF(v^*)$ und A_{max} gewählt werden. Man kann sich z.B. auch auf $A^* = A_{max}$ festlegen und erhält dann $E^* = A_{max} - sF(v^*)$ als konsistenten Zustand, der von der Systemdynamik reproduziert wird und wiederum $A^* \geq E^*$ erfüllt. (Enger gefasst ist er es nicht, denn es wäre ja auch $A^* = sF(v^*)$ möglich, was nur $E^* = 0$ zulässt). Diese Mehrdeutigkeit offenbart, woher die Lösung des dynamischen Problems bei streng konvexem τ_a kommt: Aus den höheren Aufladeraten von leeren Batterien – *deswegen* wird die Batterie für die nächste Etappe leer gefahren.

3 Modelle mit stochastischem Verbrauch

3.1 Dynamisches Modell mit stochastischem Verbrauch, konstante Aufladeraten

Wir lassen es nun zu, dass der Energieverbrauch zufälligen Einflüssen unterliegt: Der Energieverbrauch pro Streckeneinheit, F , soll nicht nur von der Fahrgeschwindigkeit v abhängen, sondern auch von einer Zufallsvariable Z , deren Realisierung erst am Ende des Streckenstücks beobachtet werden kann. Wir nehmen folgende Struktur an:

$$F(v, Z) = Z + f(v)$$

wobei Z eine positiv-wertige (stetig verteilte) Zufallsvariable mit Erw.Wert α darstellt und $f(v)$ eine konvex wachsende glatte Funktion mit $f(0) = 0$. (Prototyp ist $f(v) = \beta v^2$.) Mit Annahme dieser Struktur wird unterstellt, dass zufällige Ereignisse zu einer Erhöhung des Verbrauchs pro Streckeneinheit führen, die für alle, die tatsächlich verwendete wie auch alle anderen Geschwindigkeiten die gleiche ist: Der geschwindigkeitsabhängige Anteil des Verbrauchs, $f(v)$, wird zufällig angehoben, bleibt an sich aber deterministisch. Zu jedem Streckenabschnitt i soll es eine eigene Erhöhung $Z = Z_i$ des Verbrauchs pro Streckeneinheit F geben. Da wir wieder an einer Gleichgewichtslösung im dynamischen Modell interessiert sind, nehmen wir an, dass die Z_i „i.i.d.“ sind. D.h. alle Z_i sollen die gleiche Wkts-Verteilung haben und stochastische unabhängig voneinander sein. Das schließt insbesondere aus, dass unterschiedliche Erwartungen aufgrund von Vorinformationen über den Verbrauch auf den Etappen bestehen, und auch, dass der Verbrauch auf einer Etappe mit dem auf der nächsten korreliert.

Wenn der Verbrauch Zufälligkeiten unterliegt, kann nicht sichergestellt werden, dass die geladene Energie A – als Folge eines zufälligerweise hohen Verbrauchs auf der Etappe – in jedem Fall ausreicht, um die nächste Ladestation zu erreichen. Wir nehmen an, dass in einer solchen Situation eine „Notauffladung“ an einer Station mit wesentlich geringerer Ladegeschwindigkeit $P_b \ll P_a$ durchgeführt werden muss. Die Notauffladung ersetzt gerade die fehlende Energie, um die reguläre Ladestation zu erreichen, und zwar mit der ursprünglich für das Streckenstück vorgesehenen Geschwindigkeit. Diese Annahme vereinfacht das Modell in zweifacher Hinsicht. Zum einen kann von einer einheitlichen Fahrgeschwindigkeit für das gesamte Segment ausgegangen werden, auch im Fall einer Notauffladung. Zum zweiten kann die Energie, die nach Abzug des Verbrauchs, d.h. am Ende des Streckenstücks, in der Batterie verbleibt, nicht negativ werden, da bei vorzeitiger kompletter Entleerung der Batterie die entstehende Diskrepanz not-nachgeladen wird.

Bei konstanten Aufladeraten $P_a \gg P_b$ läuft das Problem, die *erwartete Dauer der Fahrt über n Etappen durch Wahl der Energieladungen A_i und Fahrgeschwindigkeiten v_i zu minimieren*, hinaus auf:¹⁰

$$\min_{\substack{A_j \geq E_j, v_j > 0 \\ A_j \leq A_{max}}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ c_a \cdot A_i - c_a \cdot E_i + \frac{s_i}{v_i} + c_b \cdot (s_i F(v_i, Z_i) - A_i)_+ \right\} - c_a \cdot E_n \right], \quad E_{i+1} = \varrho (A_i - s_i F(v_i, Z_i))_+$$

mit $c_b := 1/P_b \gg 1/P_a =: c_a$ und $\varrho = 1 - \delta \in [0, 1]$. Dabei steht A_i wieder für die Energiemenge, auf die die Batterie zu Beginn des i -ten Streckenstücks aufgeladen wird. E_i stellt die in der Batterie gespeicherte Energie dar, die zu Beginn der Etappe (vor der Aufladung) bereits zur Verfügung steht, also die Restenergie der Batterie, die am Ende der vorherigen Etappe übrig geblieben ist. A und v sind die Kontrollvariablen, E die Zustandsvariable. Die initiale Batterieladung E_0 ist vorgegeben. Ansonsten ergibt sich die Ausgangsenergie E_{i+1} der nächsten Etappe als die nicht verbrauchte Energie der aktuellen Etappe – es sei denn, der Verbrauch $s_i F(v_i, Z_i)$ übersteigt die geladene Energiemenge A_i : Dann ist $E_{i+1} = 0$, da eine Notauffladung sicherstellt, dass genau die fehlende Energiemenge nachgeladen wird. Man beachte, dass hier die Restriktion $A \geq sF(v)$, die bei allen deterministischen Modellen bindend erfüllt war (es war dort durchgehend optimal, die Batterie leer zu fahren), ganz entfällt. Bei der Restenergie ist eine Verlustrate von $\delta = 1 - \varrho$ vorgesehen.

¹⁰Allgemein schreiben wir $(x)_+$ für $\max(0, x)$.

Zur Lösung des Problems werden wir (statt einer Bellman-Rekursion) wieder die „Theorie konsistenter Zustände“, auch „Theorie myopischer Politiken“ in Porteus (2002) Kapitel 6 genannt, verwenden. Das Ergebnis dieser Prozedur im Fall konstanter Aufladeraten ist in folgendem Satz festgehalten:

Satz 4: *Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

Auf jeder Etappe herrscht die gleiche „Kostenstruktur“, d.h. die Streckenlängen $s_i = s$, die Aufladeraten P_a, P_b und die Verteilungen der Zufallsvariablen Z_i sind allesamt etappenunabhängig.

Die Z_i sind stochastisch unabhängig und stetig verteilt auf \mathbb{R}_+ mit existierenden Erwartungswerten. Der Träger von Z_i ist ein Intervall (z_{\min}, z_{\max}) mit $0 \leq z_{\min} < z_{\max} \leq \infty$ [damit $\bar{\Phi}^{-1}(p)$ für $0 < p < 1$ eindeutig] Der Verbrauch pro Streckeneinheit ist $F(v, Z) = f(v) + Z$, wobei $f(v)$ konvex wächst mit $f(0) = 0$.

Es ist $c_b > c_a$ und $\varrho < 1$ (Verlustrate $\delta > 0$).

Die initiale Energie beträgt $E_0 = 0$ (oder ein anderer konsistenter Zustand, siehe unten).

Dann wird das dynamische Optimierungsproblem

$$\min_{A_j \geq E_j, v_j > 0} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ c_a \cdot A_i - c_a \cdot E_i + \frac{s}{v_i} + c_b \cdot (s F(v_i, Z_i) - A_i)_+ \right\} - c_a \cdot E_n \right], \quad E_{i+1} = \varrho (A_i - s_i F(v_i, Z_i))_+$$

durch folgende (zustands- u. etappen-unabhängige) Politik (A^, v^*) gelöst:*

- $v = v^*$ wird wie im deterministischen Modell gewählt, d.h. als Lösung der Gl. $v^2 f'(v) = P_a = 1/c_a$.
- Dann wird $A = A^*$ so groß gewählt, dass $P_{NA}(A, v^*) = p^* \in (0, 1)$ mit $p^* := \frac{c_a - c_e}{c_b - c_e}$, $c_e := \varrho c_a$ wobei $P_{NA}(A, v) := P(s F(v, Z) > A) = \bar{\Phi}(A/s - f(v))$ die Wahrscheinlichkeit für eine Notaufladung bei Aufladung auf A und Fahrgeschwindigkeit v bezeichnet. Es gilt:

$$A^* = s (f(v^*) + \bar{\Phi}^{-1}(p^*)) \quad \text{mit} \quad p^* := \frac{c_a - c_e}{c_b - c_e} \in (0, 1)$$

wobei $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, die kumulierte Verteilungsfunktion der Zufallsvariable Z , $\bar{\Phi}(z) = 1 - \Phi(z)$ deren Komplement und $p \mapsto \bar{\Phi}^{-1}(p)$ deren Umkehrfunktion (‘komplementäre Fraktilsfunktion’) ist.

Die Menge der konsistenten Zustände E ist das Intervall $[0, A^*]$ (d.h. E_0 muss $\leq A^*$ sein).

Wenn das Problem unter der zusätzlichen Restriktion $A_i \leq A_{\max}$ behandelt wird, stellt das gleichermaßen ermittelte (A^*, v^*) die Lösung dar, sofern sich $A^* \leq A_{\max}$ ergibt. Andernfalls ist $A^* = A_{\max}$ und $v = v^*$ als Lösung der Gleichung $P_{NA}(A_{\max}, v) = \frac{1/(v^2 f'(v)) - c_e}{c_b - c_e}$ eindeutig bestimmt.

Anmerkungen:

0. Besonders bemerkenswert ist: v^* hängt nach wie vor nur von einem einzigen Parameter, der Aufladerate P_a , ab und ermittelt sich auch im stochastischen dynamischen Modell nach der gleichen Formel.

1. Es wird immer wieder auf A^* „aufgestockt“, dann maximal A^* verbraucht. Da $E_{i+1} \leq A_i$, ist jedes $E \leq A^*$ konsistent. Eine solche Politik kann man auch als S -Politik („Aufstockpolitik“) bezeichnen.

2. Wenn $\varrho = 0$ (vollständiger Verlust der Restenergie: $\delta = 1, c_e = 0$), ist die optimale Wahrscheinlichkeit für eine Notaufladung, p^* , durch das Verhältnis der regulären Aufladungskosten c_a zu den Notaufladungskosten c_b gegeben. In diesem Fall geht der dynamische Charakter des Problems komplett verloren (da immer $E_{i+1} = 0$, so dass die Kopplung zwischen den Etappen wegfällt) und man vollzieht effektiv eine statische Minimierung der direkten Kosten. Dies ist der Fall, in dem man die kleinsten Auflademengen A^* bekommt.

3. Für $\varrho \rightarrow 1$ (geringer Verlust an Restenergie) konvergiert $c_a - c_e$ gegen 0, A^* folglich gegen ∞ . Realistischerweise wird man bei Elektrofahrzeugen fast keine Energieverluste haben, d.h. es liegt dort gerade die Situation $c_a \approx c_e$ vor, wo das dynamische Modell (mit konstanter Aufladerate!) fast unendlich großes A^* für optimal befindet. Warum ist das so? Der Grund ist, dass in diesem Modell nur aus dem Verlust der Restenergie ein Anreiz entsteht, den Batterielevel gering zu halten, und wenn $\varrho = 1$, fällt auch dieser Anreiz weg. Wegen der konstanten Aufladerate ist es bei $\varrho = 1$ egal, auf welchem Level man eine weitere Energieeinheit investiert – sie „kostet“ (in Zeiteinheiten: c_a) immer das gleiche und ihr morgiger Wert c_e ist nicht geringer. Dagegen gibt es (bei allen ϱ , auch bei $\varrho = 1$) einen Anreiz, eine hohen Batterielevel A^* zu verwenden: Die teuren Notaufladungen, die man ganz vermeidet, wenn $A^* = \infty$. Einen Gegendruck gegen diesen Anreiz zu hohen Batterieleveln werden wir mit abnehmenden Aufladeraten schaffen. Man beachte auch: Die Lösung minimiert die Zeit, nicht den Energieverbrauch.

Einschub: Myopische Theorie. Für den Beweis von Satz 4 wird das dynamische auf ein „myopisches“ (statisches, non-dynamisches) Problem reduziert. Wir rekapitulieren dazu zunächst die allgemeine Theorie aus Porteus(2002), in einer für die vorliegende Anwendung angepassten Form:

Gegeben sei das stochastische dynamische Optimierungsproblem (die Zustandsvariable ist hier mit x bezeichnet, die Kontrollvariable mit u):

$$\min_{u_j \in \mathcal{U}_j(x_j) \forall j} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} t_i(x_i, u_i) + t_n(x_n, u_n) \right]$$

unter der Systemdynamik

$$x_{i+1} = g_i(x_i, u_i, Z_i)$$

wobei x_0 gegeben ist und die Z_i Zufallsvariablen darstellen.¹¹

Generelle Voraussetzung für die Theorie ist komplette Zeithomogenität, d.h. die direkten Kosten t_i , die Systemdynamik g_i die Restriktionen \mathcal{U}_i und die Verteilungen der Z_i hängen nicht von i ab.

Weitere Voraussetzungen sind:

- Die Z_i sind i.i.d.
- Additive (hier: subtraktive) Separabilität der direkten Kosten: $t_i(x, u) = t_a(u) - t_e(x)$.
- Die Terminalkosten haben die Struktur: $t_n(x, u) = -t_e(x)$.
- Die Systemdynamik ist unabhängig von x : $g_i(x, u, Z) = g(u, Z)$.

Sei

$$\mathcal{U}_* := \bigcup_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{U}(x)$$

die Vereinigung der Kontrollrestriktionen über alle Zustände x des Zustandsraums \mathcal{S} .

Statt des dynamischen wird folgendes statische (myopische, non-dynamische) Problem in u betrachtet:

$$\min_{u \in \mathcal{U}_*} \tau(u) := t_a(u) - \mathbb{E}[t_e(g(u, Z))]$$

Dieses Problem soll im Folgenden als „äquivalentes myopisches Problem“ bezeichnet werden.

Sei u^* eine Lösung des äquivalenten myopischen Problems.

Allgemein bezeichne

$$\mathcal{S}(u) := \{x \in \mathcal{S} : u \in \mathcal{U}(x)\}$$

die Menge der Zustände, die bei Verwendung der Kontrolle u erreichbar sind.

Theorem 6.1 aus Porteus (2002) in der hier benötigten Version: Wenn die Menge $\mathcal{S}(u^*)$ der Zustände, die bei Wahl von u^* als Kontrolle erreicht werden, konsistent ist, d.h. wenn gilt

- Für jede Realisierung z von Z ist $g(u^*, z) \in \mathcal{S}(u^*)$
($\mathcal{S}(u^*)$ muss sich unter der Systemdynamik bei allen Realisierungen von Z reproduzieren)

so gilt:

Die Politik „ $u = u^*$ “ („wähle immer $u = u^*$, unabhängig von x und i “) ist eine Lösung des dynamischen Problems, sofern in einem konsistenten Zustand gestartet wird, d.h. $x_0 \in \mathcal{S}(u^*)$.

Bei unserer Anwendung entspricht die Kontrollvariable u den Variablen (A, v) , die Zustandsvariable x der Restenergie E . Der Zustandsraum ist $\mathcal{S} = [0, A_{max}]$, die Menge $\mathcal{S}(u^*) = \mathcal{S}(A^*, v^*)$ konsistenter Zustände ist das Intervall $[0, A^*]$. Dass dieses Intervall sich unter der Systemdynamik $E_{i+1} = \rho \cdot (A - sf(v) - sZ)_+$ für jeden Wert von Z reproduziert ist trivial, da $Z \geq 0$.

¹¹Genau genommen ist die Minimierung des unbedingten Erwartungswerts hier wie auch in unserer Anwendung nicht das Ziel. Gemeint ist $\min_{u_j \in \mathcal{U}_j(x_j) \forall j} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_i[t_i(x_i, u_i)] \right\}$, wobei der Erwartungswert \mathbb{E}_i in der i -ten Periode bedingt ist auf Informationen, die eingangs dieser Periode verfügbar sind, wozu x_0, \dots, x_i und Z_0, \dots, Z_{i-1} zählen, aber nicht Z_i .

Beweis von Satz 4. Die Herleitung folgt Porteus (2002). Zur Anwendung der dort entwickelten Theorie ist das äquivalente myopische Problem (hier die Transformation des dynamischen Problems in ein „statisches Problem mit Zeitrückgewinnung“) zu lösen. Dessen Zielfunktion $\tau(A, v)$ entsteht, indem man den von (A, v) abhängigen Anteil der unmittelbaren Kosten (im Erwartungswert)

$$t(A, v) = c_a \cdot A + s/v + c_b \cdot \mathbb{E}[(s F(v, Z) - A)_+]$$

ergänzt um den Anteil aus der Zustandsänderung (ebenfalls im Erwartungswert), das ist

$$-c_a \cdot \mathbb{E}[\varrho(A - s F(v, Z))_+] = -c_e \cdot \mathbb{E}[(A - s F(v, Z))_+] \quad \text{mit } c_e := \varrho c_a$$

(man beachte die Setzung $c_e = (1 - \delta) c_a$; dies ist $\leq c_a$ und $< c_a$ bei einer positiven Verlustrate δ .)

Die Zielfunktion $\tau(A, v)$ des statischen Ersatzproblems lautet also:

$$\tau(A, v) = c_a \cdot A + s/v + c_b \cdot \mathbb{E}[(s F(v, Z) - A)_+] - c_e \cdot \mathbb{E}[(A - s F(v, Z))_+]$$

Diese Zielfunktion ist ohne die zustandsabhängige Restriktion $A \geq E$, aber unter den restlichen Restriktionen, d.h. $A \leq A_{max}$, $v > 0$ zu minimieren. Die Minimierung wird wesentlich erleichtert, wenn man weiß, dass $\tau(A, v)$ global konvex in (A, v) ist. Das ist tatsächlich der Fall, denn die ersten beiden Summanden sind sicher konvex in (A, v) . Die letzten beiden kann man zusammenfassen zu $s \mathbb{E}[c_b \cdot (Z + f(v) - A/s)_+ - c_e \cdot (A/s - f(v) - Z)_+]$ und erhält dann die Konvexität von $\tau(A, v)$ aus folgendem Lemma, dessen „innere“ konvexe Funktion k hier durch $k(A, v) = f(v) - A/s$ gegeben ist (was eine konvexe Funktion in $x = (A, v)$ darstellt, da f als solche angenommen und $-A$ linear ist):

Lemma 1: Sei Z eine Zufallsvariable (mit endlichem Erwartungswert) und $k : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion auf (der konvexen Menge) $D \subset \mathbb{R}^m$. Dann ist für $c_b > c_e > 0$ auch die Funktion

$$g(x) := \mathbb{E}[c_b \cdot (Z + k(x))_+ - c_e \cdot (-k(x) - Z)_+]$$

konvex auf D .

Man kann nicht (gut) über die Hesse-Matrix argumentieren, da g nur einmal, nicht zweimal stetig diff.bar ist (Sprünge in 2.Ableitung). Das Lemma ergibt sich nicht direkt aus Porteus (2002), Exercise 4.7. Der Beweis zeigt, dass (sogar) $x \rightarrow c_b \cdot (z + k(x))_+ - c_e \cdot (-k(x) - z)_+$ für jedes feste z konvex ist.

Beweis: Durch Betrachtung des Graphen der Funktion $h(y) = c_b (y)_+ - c_e (-y)_+$ für $c_b > c_e > 0$ erkennt man, dass diese Funktion (a) monoton wächst und (b) konvex ist. Es ist $g(x) = \mathbb{E}[h(Z + k(x))]$. Daraus folgt für $\lambda \in [0, 1]$, und $x, x' \in D$:

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda) x') &= \mathbb{E}[h(Z + k(\lambda x + (1 - \lambda) x'))] \\ &\leq \mathbb{E}[h(Z + \lambda k(x) + (1 - \lambda) k(x')))] && \text{[da } k \text{ konvex u. } h \text{ wachsend]} \\ &= \mathbb{E}[h(\lambda (Z + k(x)) + (1 - \lambda) (Z + k(x')))] && \text{[da } Z = \lambda Z + (1 - \lambda) Z] \\ &\leq \mathbb{E}[\lambda h(Z + k(x)) + (1 - \lambda) h(Z + k(x')))] && \text{[da } h \text{ konvex]} \\ &= \lambda \mathbb{E}[h(Z + k(x))] + (1 - \lambda) \mathbb{E}[h(Z + k(x')))] \\ &= \lambda g(x) + (1 - \lambda) g(x') \end{aligned} \quad \square$$

Nachdem die Konvexität der Zielfunktion geklärt ist, geht es darum, mit den beiden Erwartungswerten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(s F(v, Z) - A)_+] &= s \mathbb{E}[(Z + f(v) - A/s)_+] \\ \mathbb{E}[(A - s F(v, Z))_+] &= s \mathbb{E}[(A/s - f(v) - Z)_+] \end{aligned}$$

hantieren zu können, insbesondere partielle Ableitungen nach A bzw. v bilden zu können. Dazu werden die Formeln des folgenden Lemmas benötigt:

Lemma 2: Sei Z eine positivwertige, stetig verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert und $a \in \mathbb{R}$. Die Erwartungswerte $E[(a - Z)_+]$ bzw. $E[(Z - a)_+]$ lassen sich mit Hilfe der kumulierten Verteilungsfunktion $\Phi(z) := P(Z \leq z)$ bzw. deren Komplement $\bar{\Phi}(z) = 1 - \Phi(z) = P(Z > z)$ wie folgt ermitteln:

$$E[(Z - a)_+] = \int_a^\infty \bar{\Phi}(z) dz, \quad E[(a - Z)_+] = \int_0^a \Phi(z) dz, \quad E[\min(Z, a)] = \int_0^a \bar{\Phi}(z) dz.$$

(Die Formeln gelten auch für $a \leq 0$, wobei natürlich $\Phi(z) = 0$, $\bar{\Phi}(z) = 1$ für $z < 0$.)

Beweis mit partieller Integration (die Dichte $\varphi(z)$ als Ableitung der Verteilungsfkt. $\Phi(z)$ lesen), z.B.:

$$E[(a - Z)_+] = \int_0^\infty (a - z)_+ \varphi(z) dz = \int_0^a (a - z) \varphi(z) dz = (z - a)\Phi(z) \Big|_{z=0}^{z=a} + \int_0^a \Phi(z) dz = \int_0^a \Phi(z) dz$$

Mit diesem Lemma schreibt sich die Zielfunktion des äquivalenten myopischen Problems als:

$$\tau(A, v) = c_a \cdot A + s/v + c_b \cdot s \int_{A/s - f(v)}^\infty \bar{\Phi}(z) dz - c_e \cdot s \int_0^{A/s - f(v)} \Phi(z) dz$$

Wir wissen bereits, dass sie global konvex in (A, v) ist. Deswegen sind die Bedingungen erster Ordnung, wenn sie eine zulässige Lösung haben, bereits hinreichend für ein globales Minimum. Die partiellen Ableitungen ermitteln sich als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial A} \tau(A, v) &= c_a - c_b \cdot \bar{\Phi}(A/s - f(v)) - c_e \cdot \Phi(A/s - f(v)) \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} \tau(A, v) &= -\frac{s}{v^2} + c_b \cdot \bar{\Phi}(A/s - f(v)) \cdot s f'(v) + c_e \cdot \Phi(A/s - f(v)) \cdot s f'(v) \end{aligned}$$

Wir schreiben die $\Phi(\cdot)$ -Terme mittels $\Phi(\cdot) = 1 - \bar{\Phi}(\cdot)$ um auf $\bar{\Phi}(\cdot)$ -Terme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial A} \tau(A, v) &= c_a - c_e - (c_b - c_e) \cdot \bar{\Phi}(A/s - f(v)) \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} \tau(A, v) &= -\frac{s}{v^2} + (c_b - c_e) \cdot \bar{\Phi}(A/s - f(v)) \cdot s f'(v) + c_e \cdot s f'(v) \end{aligned}$$

Die Größe

$$\bar{\Phi}(A/s - f(v)) = P(Z > A/s - f(v)) = P(sF(v, Z) > A) =: P_{NA}(A, v)$$

lässt sich als die Wahrscheinlichkeit einer Notaufladung bei gegebenem A und v interpretieren. Es sticht ins Auge, dass diese Größe, multipliziert mit $(c_b - c_e)$, in beiden Ableitungen auftritt. Setzt man beide Ableitungen Null, kann man $\frac{\partial \tau}{\partial A} = 0$ benutzen, um sie aus $\frac{\partial \tau}{\partial v} = 0$ zu eliminieren. Dabei ergibt sich:

$$-\frac{s}{v^2} + (c_a - c_e) s f'(v) + c_e s f'(v) = 0 \iff \frac{s}{v^2} = c_a s f'(v) \iff v^2 f'(v) = \frac{1}{c_a}$$

Es ist also tatsächlich stets $v^* = v_{cPa}^*(P_a)$. Mit diesem $v = v^*$ bestimmt sich $A = A^*$ aus $\frac{\partial \tau}{\partial A} = 0$:

$$\frac{\partial \tau}{\partial A} = 0 \iff P_{NA}(A, v^*) = \bar{\Phi}(A/s - f(v^*)) = \frac{c_a - c_e}{c_b - c_e}$$

Wenn sich hierbei $A > A_{max}$ ergibt, liegt ein Kuhn/Tucker-Punkt bei $A = A_{max}$: Die Kuhn/Tucker-Bedingungen dort laufen hinaus auf $\frac{\partial \tau}{\partial A}(A_{max}, v) = \mu \geq 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial v}(A_{max}, v) = 0$. Aus $\frac{\partial \tau}{\partial v} = 0$ bei $A = A_{max}$ ergibt sich $(c_b - c_e) \cdot \bar{\Phi}(A_{max}/s - f(v)) = \frac{1}{v^2 f'(v)} - c_e$, wodurch v eindeutig festgelegt ist, da die linke Seite mit v wächst, während die rechte Seite streng vom Wert ∞ bei $v = 0$ auf $-c_e$ bei $v = \infty$ fällt. Substitution in $\frac{\partial \tau}{\partial A} = \mu$ ergibt $c_a - \frac{1}{v^2 f'(v)} = \mu$, was > 0 ist, da sich sonst $A^* < A_{max}$ ergeben hätte. \square

Anmerkung: Die Formeln aus dem zweiten Lemma liefern:

$$\frac{\partial}{\partial A} E[(sF(v, Z) - A)_+] = -P_{NA}(A, v) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} E[(sF(v, Z) - A)_+] = P_{NA}(A, v) \cdot s f'(v)$$

Beide Formeln haben die gleiche Struktur: Der Effekt der Variable auf das erwartete Ausmaß des Notaufladung – das Ausmaß beträgt: $(sF(v, Z) - A)_+$ – ist die Wahrscheinlichkeit einer Notaufladung mal dem (hier: deterministischen) Effekt der Variable auf das Ausmaß der Notaufladung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} E[\text{Ausmaß der Notaufladung}(A, v)] &= P_{NA}(A, v) \times \frac{\partial}{\partial A} \text{Ausmaß des Notaufladung}(A, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} E[\text{Ausmaß der Notaufladung}(A, v)] &= P_{NA}(A, v) \times \frac{\partial}{\partial v} \text{Ausmaß des Notaufladung}(A, v) \end{aligned}$$

Der Effekt der Entscheidungsvariablen A und v auf den (tatsächlichen, d.h. zufälligen) Notaufladungsumfang, $(sF(v, Z) - A)_+$ ist hier (d.h. beim verwendeten Modell für den Verbrauch) deterministisch (nicht mehr vom Zufall Z abhängig), weil Z einen von v und A unabhängigen Grundverbrauch misst.

3.2 Dynamisches Modell mit stochastischem Verbrauch, abnehmende Aufladeraten

Wie bereits erwähnt, kommt das dynamische stochastische Modell mit konstanten Aufladeraten bei realistischen Annahmen über Elektrofahrzeuge, nämlich fast keine Energieverluste bei erneuter Aufladung und moderat (jedenfalls nicht unendlich) große Batteriekapazität A_{max} , zum Ergebnis, dass die Restriktion $A \leq A_{max}$ praktisch immer bindet (die Batterie immer vollständig aufgeladen wird). Wenn $c_e = c_a$, d.h. wenn die Restenergieeinheit (die „morgige“, d.h. „schon einmal transportierte“ Energieeinheit) den gleichen „Wert“, gemessen in Zeiteinheiten, hat wie frische Aufladeenergie, dann wäre sogar $A^* = \infty$ optimal. Das mag absurd klingen, entspricht aber durchaus einem realen Phänomen: Wenn es keinen Grund gibt, die Aufladung zu verschieben, sondern, im Gegenteil, nur mit großer Aufladung das Erreichen des Ziels einigermaßen sicher ist, dann wird der Tank eben voll gemacht (und je größer der Tank, je besser). Bei Elektrofahrzeugen dürften hauptsächlich abnehmende Aufladeraten der Batterien für den Gegenanreiz gegen den Wunsch, „den Tank sicherheitshalber möglichst voll zu machen“, sorgen. Das Pendant zum bisherigen Modell, nur mit abnehmenden Aufladeraten wäre:

$$\min_{\substack{A_j \geq E_j, v_j > 0 \\ A_j \leq A_{max}}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \tau_a(A_i) - \tau_a(E_i) + \frac{s_i}{v_i} + \tau_b((s_i F(v_i, Z_i) - A_i)_+) \right\} - \tau_a(E_n) \right], E_{i+1} = \varrho \cdot (A_i - s_i F(v_i, Z_i))_+$$

wobei eine strikt konvexe Funktion $\tau_a(A)$, die mit A fallende Aufladerate $P_a(A) = 1/\tau'_a(A)$ abbildet. Dieses Modell scheint jedoch schwierig mathematisch exakt zu behandeln. Deswegen soll ein drittes, ein Misch-Modell, eingeführt werden, bei dem eine abnehmende Aufladerate $P_a(A)$, aber konstante Notaufladungsrate P_b und Rückgewinnungsrate $P_e = \frac{1}{\varrho c_a}$ angenommen wird:

$$\min_{\substack{A_j \geq E_j, v_j > 0 \\ A_j \leq A_{max}}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \tau_a(A_i) - c_a \cdot E_i + \frac{s_i}{v_i} + c_b \cdot (s_i F(v_i, Z_i) - A_i)_+ \right\} - c_a \cdot E_n \right], E_{i+1} = \varrho \cdot (A_i - s_i F(v_i, Z_i))_+$$

Dieses Modell lässt sich als Approximation des vollständig nicht-linearen Modells sehen, wenn man davon ausgeht, dass die Restenergien E und die Notaufladungsmengen $B = (s F(v, Z) - A)_+$ nicht zu groß werden: Dann lässt sich $\tau_a(E)$ durch $\tau'_a(0) \cdot E$ und $\tau_b(B)$ durch $\tau'_b(0) \cdot B$ gut approximieren und es ergibt sich das Mischmodell, indem man $c_a = \tau'_a(0)$ und $c_b = \tau'_b(0)$ setzt. Man nimmt dabei die hohen initialen Aufladeraten bei der Restenergienutzung und der Notaufladung als permanent an.

Man könnte vermuten, dass ein Problem bei diesem Mischmodell entsteht, wenn $P_a(A)$ unter die konstante Notaufladerate $P_b = \frac{1}{c_b}$ fällt (was systematisch auftritt, wenn $P_a(A) \rightarrow 0$ für $A \rightarrow A_{max}$). Tatsächlich stellt dies jedoch kein Problem dar, denn die Lösung „vermeidet“ ohnehin Bereiche mit $P_a(A) < P_b$, wie aus dem Beweis des folgenden Satzes klar wird. Abgesehen von der Beschränkung auf den Fall $\varrho = 1$ (was nur der Vereinfachung dient), ist der Satz recht allgemein.

Satz 5: Gegeben sei das aus $E_0 = 0$ heraus gestartete semi-lineare Problem

$$\min_{\substack{A_j \geq E_j, v_j > 0 \\ A_j \leq A_{max}}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \tau_a(A_i) - c_a \cdot E_i + \frac{s_i}{v_i} + c_b \cdot (s_i F(v_i, Z_i) - A_i)_+ \right\} - c_a \cdot E_n \right], E_{i+1} = (A_i - s_i F(v_i, Z_i))_+$$

mit strikt konvex wachsendem $\tau_a(A)$, $c_b > c_a = \tau'_a(0)$, $s_i = s \forall i$, $\varrho = 1$. Die Z_i seien i.i.d. mit $\mathbb{E}[Z_i] < \infty$ und der Träger der Verteilung der Z_i sei ein Intervall (z_{min}, z_{max}) , $0 \leq z_{min} < z_{max} \leq \infty$. Die Aufladerate $P_a(A) = 1/\tau'_a(A)$ sei streng monoton fallend in A ; wenn $P_a(A_{max}) > 0$, sei sie für $A > A_{max}$ stetig und streng monoton fallend fortgesetzt. Wie vorher sei $v^*(A) := v_{cP_a}^*(P_a(A))$.

Dann hat die Gleichung

$$P_{NA}(A, v^*(A)) = \frac{1/P_a(A) - c_a}{c_b - c_a}$$

wobei $P_{NA}(A, v) := \bar{\Phi}(A/s - f(v)) = \Pr(s(Z + f(v)) > A)$ die Wahrscheinlichkeit einer Notaufladung darstellt, eine eindeutige Lösung $A_* > 0$. Wenn $A_* < A_{max}$, so ist die durch $A^* = A_*$, $v^* = v^*(A^*)$ definierte Aufstockpolitik Lösung des dynamischen Problems. Wenn $A_* \geq A_{max}$, ist die Lösung durch $(A^* = A_{max}, v = v^*)$ mit v als Lösung von $P_{NA}(A_{max}, v) = (1/(v^2 f'(v)) - c_a)/(c_b - c_a)$ gegeben.

Beweis von Satz 5: Die Zielfunktion des äquivalenten myopischen Problems ist

$$\begin{aligned}\tau(A, v) &= \tau_a(A) + s/v + c_b \cdot \mathbb{E}[(sF(v, Z) - A)_+] - c_a \cdot \mathbb{E}[(A - sF(v, Z))_+] \\ &= \tau_a(A) + s/v + c_b s \cdot \mathbb{E}[(Z + f(v) - A/s)_+] - c_a s \cdot \mathbb{E}[(A/s - f(v) - Z)_+] \\ &= \tau_a(A) + s/v + c_b s \cdot \mathbb{E}[(Z - a_s(A, v))_+] - c_a s \cdot \mathbb{E}[(a_s(A, v) - Z)_+]\end{aligned}$$

mit $a_s(A, v) := A/s - f(v)$. Nach Lemma 1 ist $\tau(A, v)$ eine konvexe Funktion, die sich mit Lemma 2 auch folgendermaßen schreiben lässt:

$$\tau(A, v) = \tau_a(A) + \frac{s}{v} + c_b s \cdot \int_{A/s-f(v)}^{\infty} \bar{\Phi}(z) dz - c_a s \cdot \int_0^{A/s-f(v)} \bar{\Phi}(z) dz$$

Damit ermitteln sich die partiellen Ableitungen von $\tau(A, v)$ zu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial A}(A, v) &= \tau'_a(A) - c_b \cdot \bar{\Phi}(A/s - f(v)) - c_a \cdot \Phi(A/s - f(v)) \\ \frac{\partial \tau}{\partial v}(A, v) &= -\frac{s}{v^2} + c_b s \cdot \bar{\Phi}(A/s - f(v)) \cdot f'(v) + c_a s \cdot \Phi(A/s - f(v)) \cdot f'(v)\end{aligned}$$

Mit $\bar{\Phi}(z) = 1 - \Phi(z)$ schreibt sich dies als:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial A}(A, v) &= \tau'_a(A) - c_a - (c_b - c_a) \cdot \bar{\Phi}(A/s - f(v)) \\ \frac{\partial \tau}{\partial v}(A, v) &= -\frac{s}{v^2} + c_a \cdot s f'(v) + (c_b - c_a) \cdot \bar{\Phi}(A/s - f(v)) \cdot s f'(v)\end{aligned}$$

Nullsetzen von $\frac{\partial \tau}{\partial A}$ führt auf:

$$\bar{\Phi}(A/s - f(v)) = \frac{\tau'_a(A) - c_a}{c_b - c_a} \quad [\text{dabei ist wieder: } \bar{\Phi}(A/s - f(v)) = P_{NA}(A, v)]$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in $\frac{\partial \tau}{\partial v} = 0$ liefert:

$$\frac{s}{v^2} = c_a \cdot s f'(v) + (c_b - c_a) \cdot \frac{\tau'_a(A) - c_a}{c_b - c_a} \cdot s f'(v) = \tau'_a(A) \cdot s f'(v) \iff v^2 f'(v) = \frac{1}{\tau'_a(A)} = P_a(A)$$

A und v sind durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(A/s - f(v)) &= \frac{1/P_a(A) - c_a}{c_b - c_a} \\ v^2 f'(v) &= P_a(A)\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung stellt wieder die Optimalitätskurve $v^*(A) = v_{cP_a}^*(P_a(A))$ dar, was eine fallende Kurve in der (A, v) -Ebene ergibt. Setzt man $v = v^*(A)$ in die erste Gleichung ein, entsteht folgende Gleichung für A :

$$\bar{\Phi}\left(\underbrace{\frac{A}{s} - f(v^*(A))}_{=: q(A)}\right) = \underbrace{\frac{1/P_a(A) - c_a}{c_b - c_a}}_{=: p(A)}$$

Die Funktion $p(A)$ wächst mit A (da $P_a(A)$ fällt) vom Wert 0 bei $A = 0$ auf den Wert 1 im durch $P(A_b) = \frac{1}{c_b}$ definierten Punkt A_b . Eine Lösung $A > A_b$ von $\bar{\Phi}(q(A)) = p(A)$ kann nicht existieren, da $\bar{\Phi}(z)$ nur Wert zwischen 0 und 1 annimmt. Wir zeigen, dass stets eine Lösung $A_* \leq A_b$ existiert:

Die Funktion $q(A)$ wächst ebenfalls mit A (da $v^*(A)$ fällt, mithin $-f(v^*(A))$ wächst). Es sei A_{min} der eindeutig bestimmte Punkt mit $q(A_{min}) = z_{min}$, d.h. $A_{min} = s(f(v^*(A_{min})) + z_{min})$, was ≥ 0 ist. Für $A \leq A_{min}$ ist $\bar{\Phi}(q(A)) = 1$ und für $A \geq A_{min}$ fällt $\bar{\Phi}(q(A))$ stetig und streng monoton (auf 0 im Punkt \tilde{A}_{max} mit $\tilde{A}_{max} = s(f(v^*(\tilde{A}_{max})) + z_{max})$, wobei $\tilde{A}_{max} = \infty$ erlaubt ist). In jedem Fall werden die Funktionen $p(A)$ und $\bar{\Phi}(q(A))$ sich in einem Punkt A_* mit $0 \leq A_* \leq A_b$ schneiden (und dieser Schnittpunkt ist eindeutig, da auch $p(A)$ stetig und streng monoton wächst): Entweder ist $A_{min} < A_b$, dann schneiden sich die Graphen in einem (einzigem) Punkt $A_* < A_b$ oder $A_{min} \geq A_b$, dann ist $A_* = A_b$ der (einzig) Schnittpunkt.

Wenn $A_* \leq A_{max}$, hat man damit das Minimierungsproblem gelöst: Die notwendigen Bedingungen führen auf eine eindeutige zulässige Lösung $A^* = A_*$, $v^* = v^*(A^*)$ und sie sind hier auch hinreichend, da die Zielfunktion wiederum konvex ist. (Probleme mit der Konvexität entstehen, wenn die Zeitrückgewinnung, d.h. die Funktion τ_e , nicht-linear ist).

Die Argumentation bei $A_* > A_{max}$ ist analog zum Beweis von Satz 4.

Numerische Bestimmung von (A^*, v^*) : Der vorstehende Beweis von Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (A^*, v^*) des semi-linearen Modells legt ein einfaches, aber robustes Bisektionsverfahren zu deren numerischer (d.h. approximativer) Ermittlung nahe.¹² In der zu lösenden Gleichung

$$\bar{\Phi}\left(\underbrace{\frac{A}{s} - f(v^*(A))}_{=: q(A)}\right) = \underbrace{\frac{1/P_a(A) - c_a}{c_b - c_a}}_{=: p(A)}$$

steht links eine fallende Funktion von A , $\bar{\Phi}(q(A))$, rechts eine wachsende Funktion, $p(A)$. Die folgende R-Funktion `Av.star` implementiert das darauf basierende Bisektionsverfahren: Ausgehend von $A_{lo} = 0$ und $A_{hi} = A_{max}$ wird iterativ jeweils im Punkt $A = \frac{1}{2}(A_{lo} + A_{hi})$ durch Vergleich von $\bar{\Phi}(q(A))$ mit $p(A)$ entschieden, ob A^* im Intervall $[A_{lo}, A]$ oder $[A, A_{hi}]$ liegt:

```
Av.star <- function(s, tol=1E-6) { # Ermittelt (A*,v*) durch Bisektion.
  A.lo <- 0; A.hi <- A.max      # A.max, c.a, c.b und die Funktionen
  while (A.hi - A.lo > tol) {   # P.a(A), f(v), v.star(A), Phibar(z)
    A <- 0.5*(A.lo+A.hi)       # müssen extern (global) definiert sein.
    p <- (1/P.a(A) - c.a)/(c.b - c.a); q <- A/s - f(v.star(A))
    ASternRechtsderMitte <- (Phibar(q) > p)
    if (ASternRechtsderMitte) { A.lo <- A } else { A.hi <- A }
  }
  return( c(A,v.star(A)) )
}
```

(A^*, v^*) als Schnittpunkt einer wachsenden Kurve mit der fallenden Optimalitätskurve:

In den Diagrammen auf der folgenden Seite wird die Entstehung der Lösung (A^*, v^*) des semi-linearen Modells aus Satz 5 illustriert. Der geschwindigkeitsabhängige Anteil des Verbrauchs ist dabei jeweils $f(v) = \beta v^2$ mit $\beta = 0.0015[\text{kWh}/100\text{km}]/[\text{km}/\text{h}]^2$. Für die Aufladeraten $P_a(A)$ wird links das Quadratwurzelmodell $P_a(A) = P_a(0) \cdot \sqrt{1 - A/A_{max}}$ und rechts das exponentielle Modell $P_a(A) = P_a(0) \cdot \exp(-\lambda \cdot A)$ verwendet, jeweils mit $P_a(0) = 120$ kW, wobei beide Modelle auf $\tau_a(A_{max}) = t_{max}$ mit $A_{max} = 90$ kWh und $t_{max} = 1.5$ h kalibriert sind. Für die (konstante) Notaufladungsrate $P_b = 1/c_b$ wurde ein Achtel der initialen regulären Aufladerate, also $P_b = 15$ kW, angenommen. Restenergie spart Aufladezeit mit der vollen Rate $P_e = 120$ kW. Die Diagramme zeigen für $s \in \{100, 200, 300, 400\}$ km die beiden Kurven (die erste erfasst die Veränderungen gegenüber der „Leerfahrkurve“ des deterministischen Modells; die zweite ist demgegenüber unverändert):

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(A/s - f(v)) = \frac{1/P_a(A) - c_a}{c_b - c_a} &\iff f(v) = \frac{A}{s} - \bar{\Phi}^{-1}\left(\frac{1/P_a(A) - c_a}{c_b - c_a}\right) \quad (\text{wachsend; endet, wenn } \frac{1}{P_a(A)} = c_b) \\ v^2 f'(v) = P_a(A) &\iff f'(v) = P_a(A)/v^2 \quad (\text{Optimalitätskurve, fallend}) \end{aligned}$$

Um die realisierten Notaufladewahrscheinlichkeiten graphisch einschätzen zu können, sind zusätzlich die Gebiete $\{(A, v) : 0.01 \leq P_{NA}(A, v) \leq 0.3\}$ schattiert. (Die „obere“ Grenze repräsentiert also das 30%-Quantil, nicht das 99%-Quantil.) In den Legenden finden sich neben A^*, v^* auch die realisierte Notaufladewahrscheinlichkeit $p^* = P_{NA}(A^*, v^*)$ sowie der erwartete effektive Energieverbrauch F_{eff}^* (in kWh/100km-Einheiten) und die erwartete effektive Geschwindigkeit $v_{eff}^* = s/\tau(A^*, v^*)$ (in km/h-Einheiten). In den Effektivgrößen ist der erwartete Notaufladungsumfang und die erwartete Restenergie berücksichtigt.¹³ Die Diskrepanz $sF_{eff}^* - A^*$ kann daher positiv oder negativ sein.

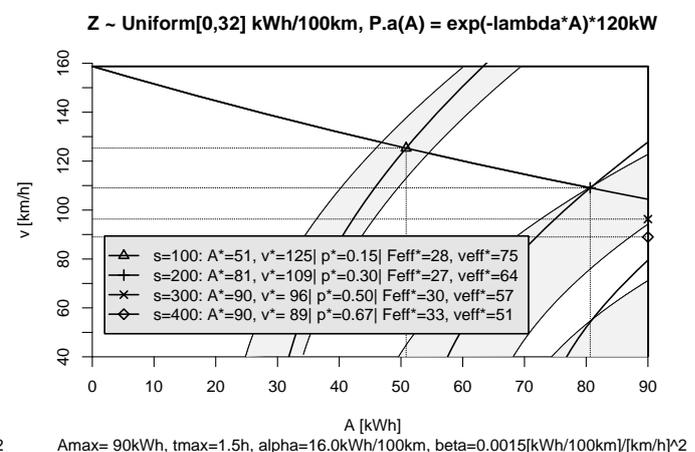
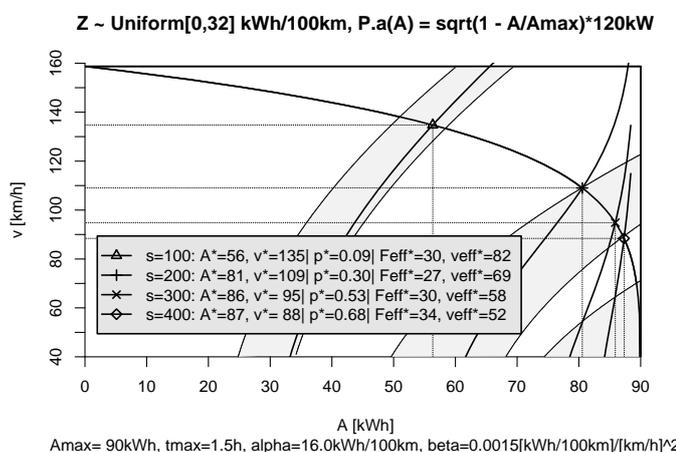
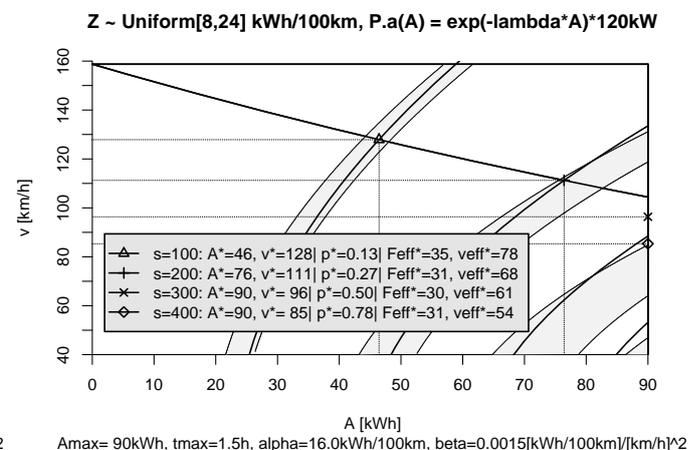
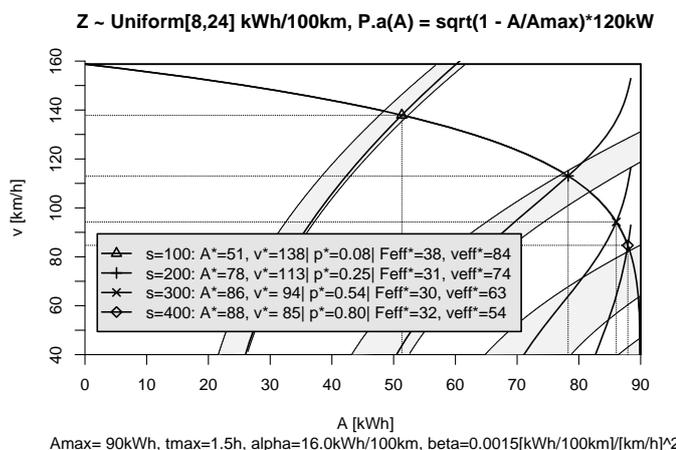
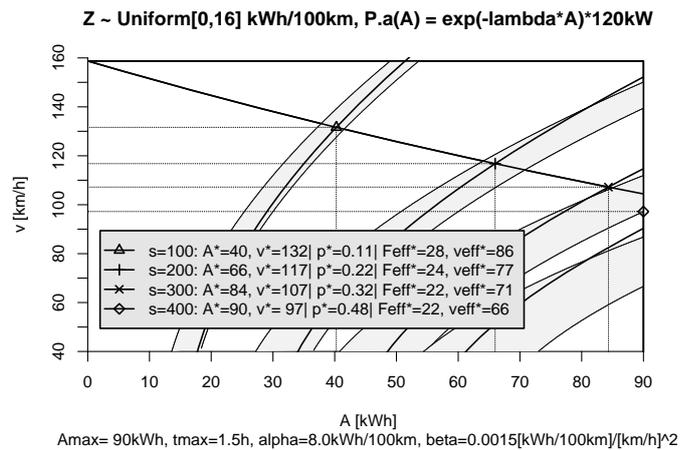
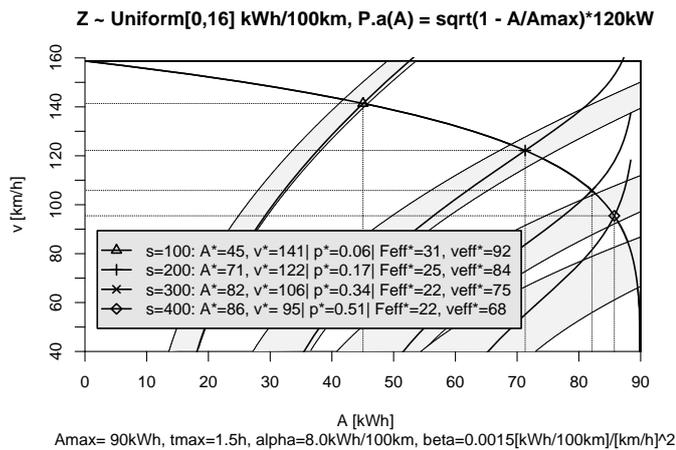
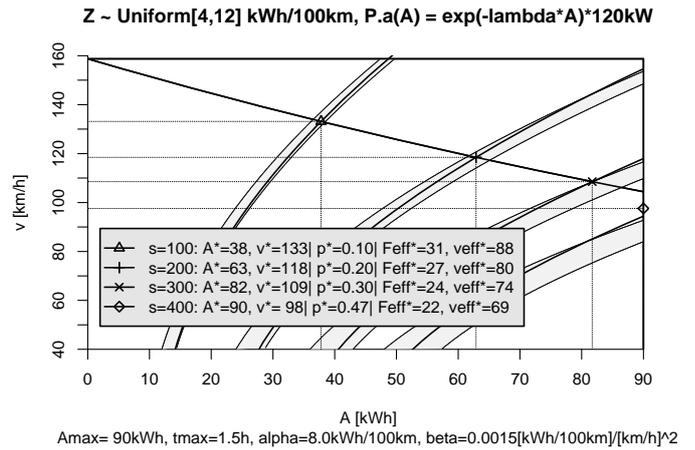
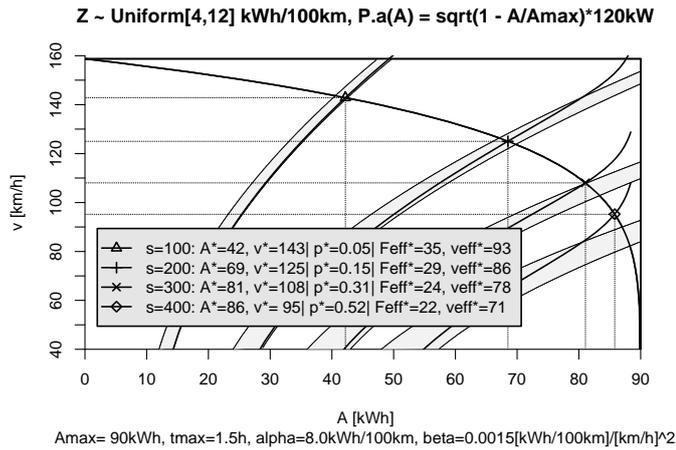
Gezeigt werden die Ergebnisse für auf Intervallen (z_{min}, z_{max}) gleichverteilten Grundverbrauch Z mit:

	z_{min}	z_{max}	$\alpha := E[Z]$	$\sigma := sd(Z)$
1. Reihe:	4	12	8 klein	$8/\sqrt{6}$ klein
2. Reihe:	0	16	8 klein	$16/\sqrt{6}$ mittel
3. Reihe:	8	24	16 groß	$16/\sqrt{6}$ mittel
4. Reihe:	0	32	16 groß	$32/\sqrt{6}$ groß

(Alle Angaben in kWh/100km; der Faktor $\sqrt{6} \approx 2.5$ entsteht aus $\text{var}(Z) = (z_{max} - z_{min})^2/6$.)

¹²Eine analytische Ermittlung, zumal für beliebige Verteilungen $\Phi(z)$, erscheint ohnehin aussichtslos; Ein Newton-Verfahren wäre sicher numerisch effizienter – man bekäme quadratische statt geometrische Konvergenz – aber auch wesentlich schwieriger zu implementieren und vermutlich weniger robust.

¹³Sofern nötig, wurden die Erwartungswerte über die Integrale aus Lemma 2 durch numerische Quadratur approximiert.

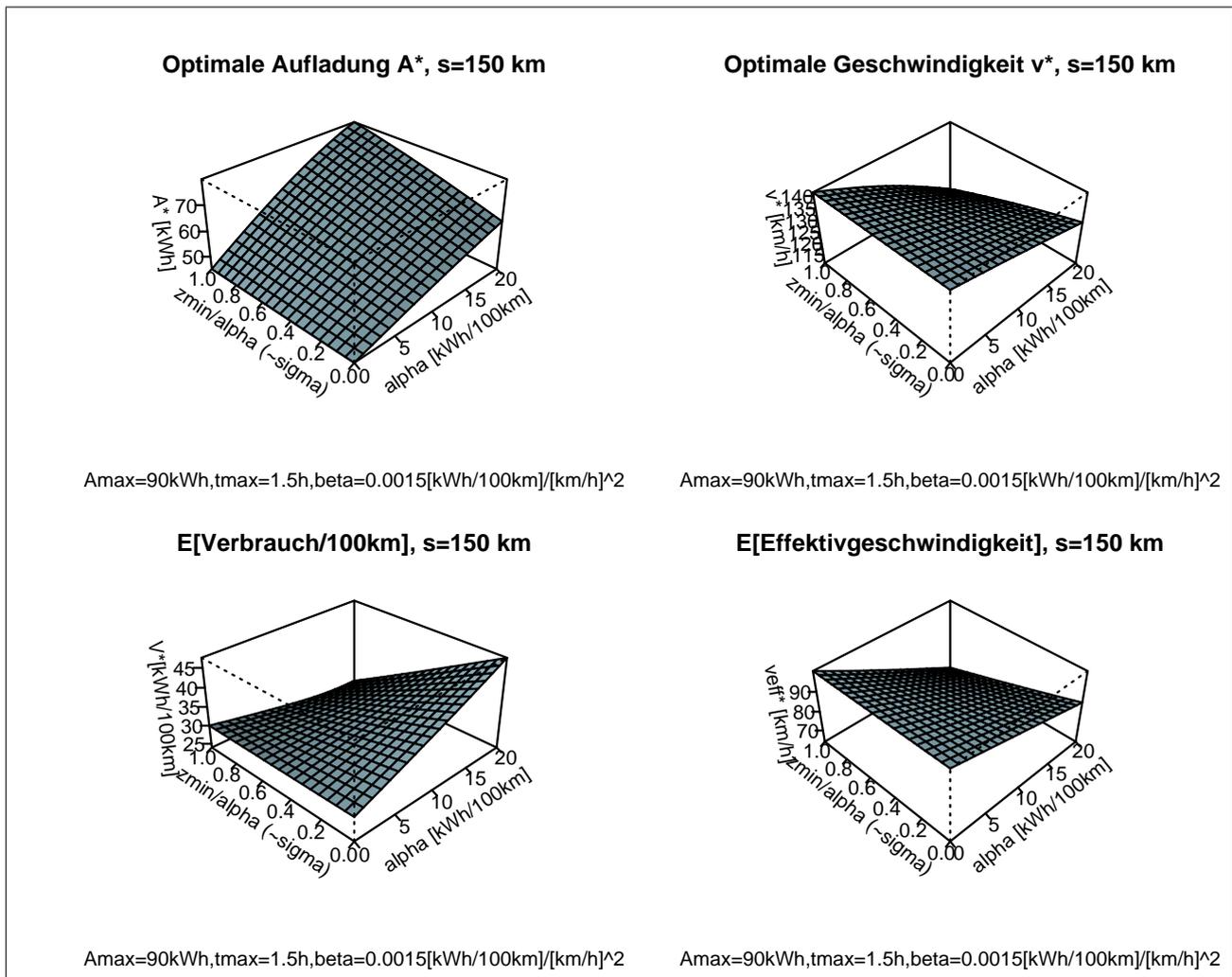


Beim Quadratwurzel-Auflademodell entwickeln die wachsenden Kurven nun Wendepunkte: Als Funktion von A gesehen, wachsen sie zunächst konkav, dann konvex und enden im Punkt A_b , ab dem die

reguläre Aufladerate P_a die Notaufladerate unterschreitet, mit einer unendlichen Tangentensteigung.¹⁴ Die Streckenlänge s , abgesehen von Situationen, wo eine Notaufladewahrscheinlichkeit oberhalb von $1/2$ realisiert wird, einen einheitlichen Effekt auf sämtliche Variablen: A^* steigt, v^* sinkt, p^* steigt, F_{eff}^* sinkt und v_{eff}^* sinkt mit s . Die Reduktion des erwarteten Verbrauchs F_{eff}^* , die mit wachsender Streckenlänge bei relativ seltenen Notaufladungen auftritt, ist bemerkenswert; sie ist verursacht durch die niedrigeren Geschwindigkeiten v^* , die von der fallenden Optimalitätskurve aufgrund der (für größeres s benötigten) höheren Aufladungen A^* impliziert werden. Einen ähnlichen Effekt hat eine Vergrößerung der Varianz von Z , was im Folgenden detaillierter untersucht werden soll.

Effekt von Erwartungswert und Varianz von Z auf im Optimum realisierte Größen.

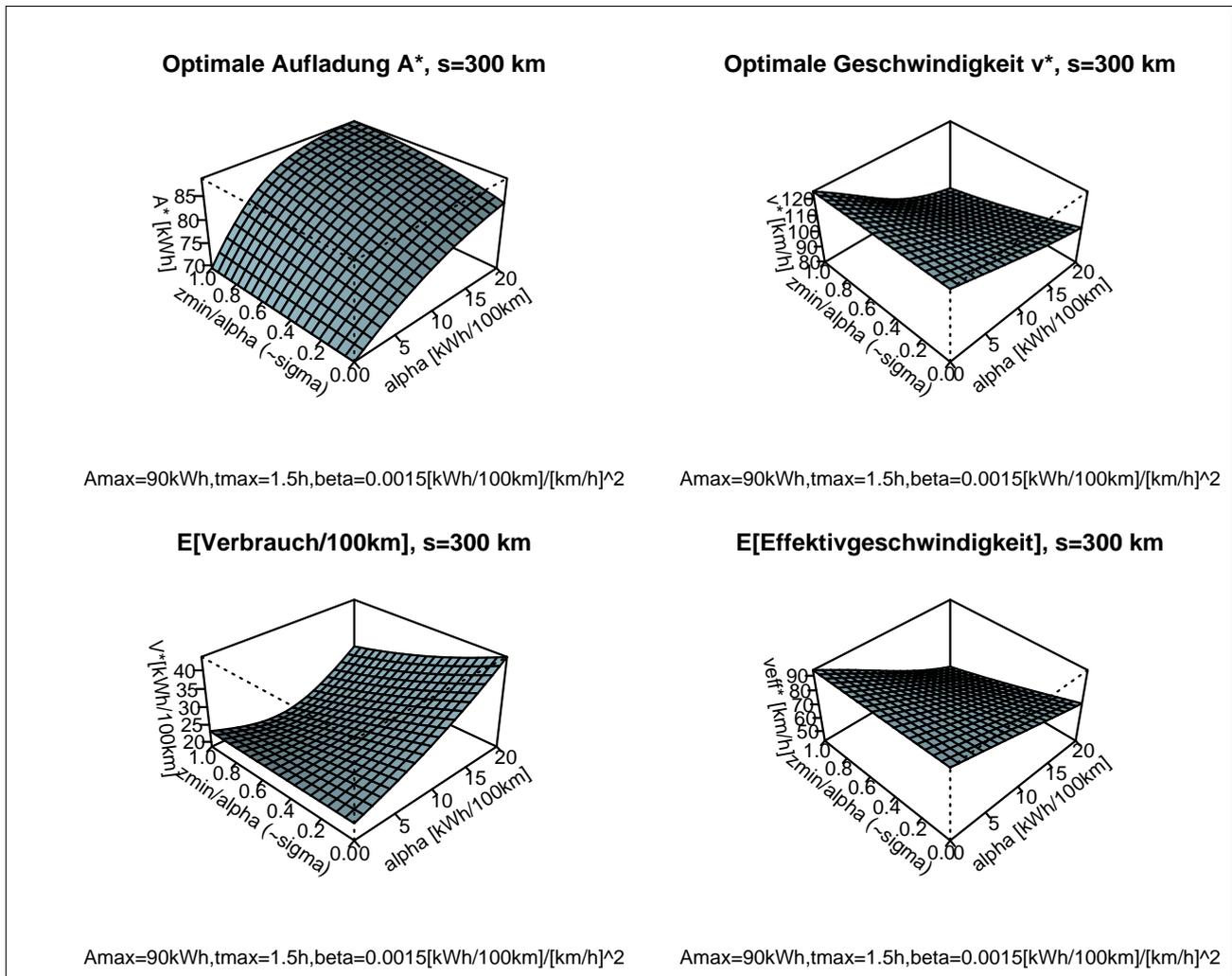
Wir diskutieren hier nur das Quadratwurzelmodell, das mit seiner für $A \rightarrow A_{max}$ auf 0 absinkenden Aufladerate zumindest für das „Supercharging“ von Tesla das wesentlich adäquatere Modell darstellt. Solange man sich mit den optimalen Aufladeraten A^* nicht allzu sehr dem Punkt A_b nähert (der zwar kleiner A_{max} ist, aber bei geringer Notaufladerate nicht allzu weit entfernt von A_{max} liegt), ergeben sich monotone Effekte von $\alpha := E[Z]$ und $\sigma := sd(Z)$ auf die Größen (A^*, v^*) , (F_{eff}^*, v_{eff}^*) .¹⁵ Dies zeigen die folgenden Diagramme, bei denen eine Gleichverteilung von Z auf Intervallen (z_{min}, z_{max}) unterstellt ist, deren Grenzen gemäß $z_{min} = r \alpha$, $z_{max} = (1 + r) \alpha$ über die Parameter α und $r \in [0, 1]$ variiert werden. Mit α legt man den erwarteten Grundverbrauch $E[Z] = \alpha$ fest und mit r dessen Standardabweichung $sd(Z) = \sigma$, die proportional zu $r = z_{min}/\alpha$ ist. Bei $s = 150$ km ergibt sich:



¹⁴Beim exponentiellen Auflademodell existiert der Endpunkt A_b ebenfalls, nur liegt er außerhalb von $[0, A_{max}]$ und es entwickelt sich dort keine senkrechte Asymptote; es muss vorher noch nicht einmal konvexer Anstieg vorliegen.

¹⁵Es sei daran erinnert, dass F_{eff}^* für den erwarteten Verbrauch pro Streckeneinheit, v_{eff}^* für die Effektivgeschwindigkeit im Optimum steht, wobei jeweils Verluste aus Notaufladungen bzw. Gewinne aus Restenergie einbezogen sind. F_{eff}^* ist in den Diagrammen als V^* bezeichnet.

Qualitativ lassen sich die Effekte einer Änderung von α oder σ ableiten, wenn man die Richtung des Effekts auf A^* kennt und berücksichtigt, dass die Optimalitätskurve eine *entgegengesetzte* Bewegung von v^* impliziert. Bevor dies genauer erläutert wird, soll das Ergebnis für $s = 300$ km präsentiert werden:



Auch hier lassen sich die Effekte i.W. qualitativ ableiten, wenn man die Richtung des Effekts auf A^* kennt (bzw. antizipiert) und berücksichtigt, dass die Optimalitätskurve eine *entgegengesetzte* Bewegung von v^* impliziert. Beispielsweise kann man antizipieren, dass eine Erhöhung der Unsicherheit σ über den Grundverbrauch eine Vergrößerung von A^* zur Folge hat, was eine Reduktion von v^* impliziert. Es ergibt sich damit ein bemerkenswertes Ergebnis: Ein **negativer Effekt einer Erhöhung von σ auf den erwarteten effektiven Verbrauch F_{eff}^* pro Streckeneinheit**. Denn

$$\begin{aligned}
 F_{eff}^* &= E[F(v^*, Z) + (F(v^*, Z) - A^*/s)_+ - (A^*/s - F(v^*, Z))_+] \\
 &= E[F(v^*, Z) + F(v^*, Z) - A^*/s] \quad \text{da } (X)_+ - (-X)_+ = X \\
 &= 2\alpha + 2f(v^*) - A^*/s
 \end{aligned}$$

so dass mit der durch größeres σ induzierten Erhöhung von A^* , was eine Reduktion von v^* , mithin $f(v^*)$, zur Folge hat, sich ein (gewissermaßen dreifacher) Reduktionseffekt auf F_{eff}^* ergibt. Wie die Lage des Minimums im Verbrauchsdiagramm zeigt, ist dieser Effekt bei $s = 300$ km besonders stark bei einem Grundverbrauch von $\alpha \approx 8$ kWh/100km – gerade jenem Wert, der sich beim Fitten der Verbrauchsdaten von Tesla für α ergab. Der Effekt ist bei diesem α so stark, dass für darunterliegendes α eine Erhöhung des Grundverbrauchs sogar überkompensiert wird, indem ein erhöhter (erwarteter) Grundverbrauch α zu einer Verringerung des (erwarteten) Gesamtverbrauchs F_{eff}^* führt!

Man beachte, dass das Vorzeichen des Effekts von σ auf F_{eff}^* nur vom Vorzeichen des Effekts von σ auf A^* abhängt, so dass sich das gleiche Ergebnis auch bei geänderter Verteilung von Z ergeben sollte. Wir diskutieren im nächsten Abschnitt, wann der Effekt von σ auf A^* negativ ist.

3.3 Komparativ-statische Aussagen bzgl. Verteilungsparametern

Wir betrachten die Situation, dass die Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Zufallsvariablen $Z = Z_i$ des semi-linearen Modells von einem Parameter μ abhängt, wie $\mu = \alpha = E[Z]$ oder $\mu = \sigma = \text{sd}(Z)$:

$$\Phi(z) = \Phi(z, \mu) = \Phi_\mu(z)$$

Die Frage ist: Wie ändern sich interessierende Größen, wie $A^*, v^*, v_{eff}^*, F_{eff}^*$, mit μ ? Da sich, wie gesehen, der Effekt auf die interessierende Größe häufig aus dem Effekt auf $A^* = A^*(\mu)$ ableiten lässt (z.B. ändert sich $v^*(\mu)$ immer in entgegengesetzte Richtung), konzentrieren wir uns auf $A^*(\mu)$. Dessen definierende Gleichung ist (wir schreiben $A(\mu)$ statt $A^*(\mu)$ und unterdrücken häufig auch μ):

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_\mu(A/s - f(v)) &= \frac{1/P_a(A) - c_a}{c_b - c_a} & \Rightarrow & \quad \bar{\Phi}_\mu(A/s - f(v^*(A))) = \frac{1/P_a(A) - c_a}{c_b - c_a} \\ v^2 f'(v) &= P_a(A) \end{aligned}$$

bzw.

$$\bar{\Phi}_\mu(A(\mu)/s - f(v^*(A(\mu)))) = \frac{c_b - 1/P_a(A(\mu))}{c_b - c_a}$$

Totale Ableitung der linken und rechten Seite nach μ ergibt mit $\varphi_\mu(z) := \frac{d}{dz}\Phi_\mu(z)$ als der Dichte:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \Phi_\mu(\dots) + \underbrace{\varphi_\mu(\dots)}_{\geq 0} \cdot \left(\frac{1}{s} - \underbrace{f'(v^*(A))}_{\geq 0} \underbrace{v^*(A)}_{< 0} \right) \cdot A'(\mu) = \frac{1}{c_b - c_a} \frac{P'_a(A)}{P_a^2(A)} \cdot A'(\mu)$$

Bei Berücksichtigung des negativen Vorzeichens von $v^*(A)$ und $P'_a(A)$ schreibt sich dies als:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \Phi_\mu(\dots) + \varphi_\mu(\dots) \cdot \left(\frac{1}{s} + f'(v^*(A)) |v^*(A)| \right) \cdot A'(\mu) = - \frac{1}{c_b - c_a} \frac{|P'_a(A)|}{P_a^2(A)} \cdot A'(\mu)$$

D.h.

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \Phi_\mu(\dots) = - \underbrace{\left[\frac{1}{c_b - c_a} \frac{|P'_a(A)|}{P_a^2(A)} + \varphi_\mu(\dots) \left(\frac{1}{s} + f'(v^*(A)) |v^*(A)| \right) \right]}_{> 0} \cdot A'(\mu)$$

Damit ist gezeigt:

Satz 6: *Im semi-linearen Modell mit einer strikt auf $P_a(A_{max}) = 0$ fallenden Aufladerate $P_a(A)$ gilt:*

Die Änderung von A^ mit einer Änderung des Verteilungsparameters μ läuft der Änderung, die $\Phi_\mu(z)$ im Quantil $z = A^*/s - f(v^*)$ mit der Änderung von μ vollzieht, entgegen.*

Da $\bar{\Phi}_\mu = 1 - \Phi_\mu$ kann man auch sagen:

Die Änderung von A^ mit einer Änderung des Verteilungsparameters μ ist gleichlaufend mit der Änderung, die $\bar{\Phi}_\mu(z)$ im Quantil $z = A^*/s - f(v^*)$ mit der Änderung von μ vollzieht.*

Oder, da $\bar{\Phi}(A/s - f(v)) = P_{NA}(A, v)$:

Die Änderung von A^ mit einer Änderung des Verteilungsparameters μ ist gleichlaufend mit der Änderung, die die Notaufladewahrscheinlichkeit im Punkt (A^*, v^*) mit der Änderung von μ vollzieht.*

Die Änderung von v^ läuft jeweils der Änderung von A^* entgegen.*

Im Normalfall wird man mit einer Vergrößerung der Varianz von Z eine Vergrößerung der Notaufladewahrscheinlichkeit bekommen. Das zeigt, dass der im vorherigen Abschnitt beobachtete reduzierende Effekt einer Erhöhung der Varianz von Z auf den effektiven Verbrauch normalerweise eintritt.

Bei einer (zum konstant gehaltenen Erwartungswert $\alpha = E[Z]$) symmetrischen Verteilung, wie z.B. einer Gleichverteilung, hat eine Vergrößerung von $\sigma = \text{sd}(Z)$ einen reduzierenden Effekt auf $\Phi_\sigma(z)$ (genau) für $z < E[Z]$. Das „Normalverhalten“ bzgl. σ liegt genau dann vor, wenn die Notaufladewahrscheinlichkeit $< \frac{1}{2}$ ist. Dies erklärt das „abnormale“ Verhalten in den Diagrammen bei $s = 400$ km.

3.4 Komparativ-statische Aussagen bzgl. der Streckenlänge s

Mit der gleichen Technik wie im vorherigen Abschnitt lässt sich nachweisen:

Satz 7: *Im semi-linearen Modell mit einer strikt auf $P_a(A_{max}) = 0$ fallenden Aufladerate $P_a(A)$ führt eine Verlängerung der Strecken s stets zu einer Vergrößerung von A^* , mithin einer Reduktion von v^* , wobei jedoch die auf die Strecke bezogene Aufladungsmenge A^*/s mit s stets sinkt. Der effektive Verbrauch $F_{eff}^* = E[F(v^*, Z) + (F(v^*, Z) - A^*/s)_+ - (A^*/s - F(v^*, Z))_+]$ fällt mit s für genügend kleine s .*

Beweis: Für $A^* = A^*(s) = A(s) = A$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & \bar{\Phi}(A/s - f(v^*(A))) = \frac{1/P_a(A) - c_a}{c_b - c_a} \\
 \Rightarrow & \Phi(A/s - f(v^*(A))) = \frac{c_b - 1/P_a(A)}{c_b - c_a} \\
 \Rightarrow & \varphi(\dots) \cdot \left(\frac{A's - A}{s^2} - f'(v^*(A)) v^{*'}(A) \cdot A' \right) = + \frac{1}{c_b - c_a} \frac{P'_a(A)}{P_a^2(A)} \cdot A' \\
 \Rightarrow & \varphi(\dots) \cdot \left(-\frac{A}{s^2} + \frac{1}{s} \cdot A' + f'(v^*(A)) |v^{*'}(A)| \cdot A' \right) = - \frac{1}{c_b - c_a} \frac{|P'_a(A)|}{P_a^2(A)} \cdot A' \\
 \Rightarrow & \left[\underbrace{\frac{1}{c_b - c_a} \frac{|P'_a(A)|}{P_a^2(A)} + \varphi(\dots) \left(\frac{1}{s} + f'(v^*(A)) |v^{*'}(A)| \right)}_{> 0} \right] \cdot A'(s) = \underbrace{\varphi(\dots) \frac{A}{s^2}}_{\geq 0}
 \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $A^{*'}(s) > 0$ ist. Der Beweis für $\tilde{F}^* = A^*/s$ läuft auf eine ähnliche, hier nicht vorgeführte Rechnung hinaus. Die Aussagen zu v^* und F_{eff}^* folgen aus $v^* = v^*(A^*)$ und $F_{eff}^* = 2\alpha + 2f(v^*) - \tilde{F}^*$. \square

3.5 Weitere Anmerkung zum semi-linearen Modell

Die „Leerfahrkurve“ $A = sF(v) = sf(v) + s\alpha$ des deterministischen Modells ist hier ersetzt durch:

$$A = sf(v) + s \underbrace{\bar{\Phi}^{-1}\left(\frac{1/P_a(A) - c_a}{c_b - c_a}\right)}_{\hat{=} \alpha(A)} = sf(v) + s \underbrace{\bar{\Phi}^{-1}\left(\frac{1/(v^2 f'(v)) - c_a}{c_b - c_a}\right)}_{\hat{=} \alpha(v)}$$

D.h. das Interzept α des Verbrauchs lässt sich als Fraktile von Z sehen. Für $A \rightarrow 0$ konvergiert $1/P_a(A)$ gegen c_a und α damit gegen z_{max} , für $A \rightarrow A_b$ konvergiert $1/P_a(A)$ gegen c_b und α damit gegen z_{min} .

Danksagung

Ich möchte mich bei Prof. Fleischer für die kritische Durchsicht der Arbeit und die Hinweise bedanken.

Literatur

- [1] Bertsekas, D.P.: „*Dynamic Programming and Stochastic Control*“, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1976
- [2] Masuch, N., J. Keiser, M. Lutzenberger, S. Albayrak: „*Wind Power-Aware Vehicle-to-Grid Algorithms for sustainable EV Energy Management Systems*“, Electric Vehicle Conf. 2012, IEEE.
- [3] Porteus, E.L.: „*Foundations of Stochastic Inventory Theory*“, Stanford University Press, 2002
- [4] Sobel, M.: „*Myopic solutions of Markovian decision processes and stochastic games*“, Operations Research 26, 995-1009, 1981
- [5] Veinott, A.F.: „*Optimal policy for a multi-product, dynamic, non-stationary inventory problem*“, Management Science 12, 206-222, 1965
- [6] Veinott, A.F.: „*On the optimality of (s, S) inventory policies: new conditions and a new proof*“, SIAM Journal on Applied Mathematics 14, Nr. 5, 1067 - 1083, 1966
- [7] Zhang, T., W. Chen, Z. Han, Z. Cao, „*Charging scheduling of electric vehicles with local renewable energy under uncertain electric vehicle arrival and grid power price*“, arXiv:1301.2457v1 [math.OC], 2013