Formelsammlung zur Dynamischen Optimierung

K.-H. Schild

Philipps-Universität Marburg
Fb. Wirtschaftswissenschafnten
Fachgebiet Statistik

Stand:

31. März 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Unrestringierte statische Optimierung **2**
- 1.1 Anhang 1: Hurwitz-Kriterium 3
- 1.2 Anhang 2: Konvexität/Konkavität von (diff.baren) Fktnen 4

2 Statische Optimierung unter Gleichungsrestriktionen (Lagrange) **5**
- 2.1 Lagrange-Methode bei einer Restriktion 5
- 2.2 Lagrange-Methode mit mehreren Restriktionen 6

3 Statische Optimierung unter Ungleichungsrestriktionen (Kuhn-Tucker) **7**
- 3.1 Definition des Standard-Problems 7
- 3.2 Kuhn-Tucker-Bedingungen 7

4 Klassische Variationsrechnung **9**

5 Kontrolltheorie I **11**
- 5.1 Lineare Systeme von Diff.Gln mit konstanten Koeffizienten 13

6 Kontrolltheorie Ib (‘current value’) **14**

7 Kontrolltheorie II (restring. Kontrolle) **15**

8 Kontrolltheorie III (Systeme) **17**

9 Kontrolltheorie IV (Gemischte Zustands-/Kontrollrestriktionen) **19**
- 9.1 Zustandsabhängige Restriktionen an die Kontrolle 19
- 9.2 Reine Zustandsrestriktionen 20

10 Dynamische Programmierung I (deterministische Probleme) **21**
- 10.1 Bellman-Gleichung für zeitdiskrete determinist. Probleme 21
- 10.2 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (zeitstetige determinist. Probleme) 22

11 Dynamische Programmierung II (stochastische Probleme) **24**
- 11.1 Bellman-Gleichung für zeitdiskrete stochastische Probleme 24
- 11.2 Stochastische Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung 25
- 11.3 Anhang: Stochastische Differentialgleichungen; Itô-Formel 26

Kapitel 1

Unrestringierte statische Optimierung

Die Zielfunktion ist hier eine Fkt. $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit einem **offenen Definitionsbereich** D (d.h. der Rand von D gehört nicht zu D), die (genügend oft) **stetig diff.bar** auf D ist.
Mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oder f'_{x_i} bezeichnet man die **partielle Ableitung** von f nach x_i und mit

$$\boldsymbol{\nabla} f = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1} \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right) \quad \text{(lies: nabla } f\text{)}$$

die Zusammenfassung der n part. Ableitungen zu einem Vektor, dem **Gradienten** von f.
Die partiellen Ableitungen und damit auch der Gradient sind i.a. selbst wieder Funktionen der n Variablen $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Man schreibt daher auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})$.
Der Gradient von f im Punkt $\boldsymbol{x}$ ist ein Vektor, der, wenn man ihn im Punkt $\boldsymbol{x}$ anheftet, senkrecht zu der Isoquante von f im Punkt $\boldsymbol{x}$ steht und in Richtung des steilsten Anstiegs von f zeigt (seine Länge gibt die *momentane Anstiegsrate* von f in diese Richtung an).

Definition: Die Funktion f besitzt eine ***globale*** **Maximal- bzw. Minimalstelle** $\boldsymbol{x}^* \in D$, wenn

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^*) \quad \text{bzw.} \quad f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*) \qquad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in D$$

Eine ***lokale*** **Maximal- bzw. Minimalstelle** $\boldsymbol{x}^* \in D$ liegt vor, wenn die betreffende Ungleichung nur für alle $\boldsymbol{x}$ aus einer (relativ zu D offenen) Teilmenge $\tilde{D}$ von D erfüllt ist.
Minima und Maxima werden zusammenfassend als Extrema bezeichnet und anstelle von globalen bzw. lokalen Extrema spricht man auch von *absoluten* bzw. *relativen* Extrema.

Anmerkung: Indem man D als *offene* Menge annimmt, kann es, wenn überhaupt, nur 'innere' (lokale oder globale) Extremstellen geben. Damit wird das Problem, auch auf dem Rand von D liegende Extremstellen von f zu identifizieren, hier ausgeklammert.

Satz 1.1 (Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum)
Es sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar (D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, d.h. der Rand von D gehört nicht zu D). Dann gilt: Besitzt f im Punkt $\boldsymbol{x}$ ein lokales Extremum, so ist:

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

Die Bedingung $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ stellt ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

von n Gleichungen in n Unbekannten dar.
Lösungen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_s$ des Gleichungssystems $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ nennt man auch stationäre Punkte, die Bedingung selbst die **Stationaritätsbedingung** oder die **Bedingung erster Ordnung**.
Nicht jeder stationäre Punkt ist ein lokales Extremum. Allgemein nennt man einen *stationären Punkt $\boldsymbol{x}_s$, der keine lokale Extremstelle ist*, einen **Sattelpunkt** der Funktion.

Ob ein stationärer Punkt $\boldsymbol{x}_s$ tatsächlich ein lokales Extremum ist, lässt sich mittels **Definitheit**seigenschaften der sog. **Hesse-Matrix** von f im stationären Punkt überprüfen. Die *Hesse-Matrix* $H_f(\boldsymbol{x})$ von f im Punkt $\boldsymbol{x}$ ist die $n \times n$-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von f (ausgewertet im Punkt $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots x_n)$):

$$H_f(\boldsymbol{x}) \;=\; \left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots x_n)\right)$$

Satz 1.2 (Hinreichende Bedingung für lokales Extremum)
Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und $\boldsymbol{x}_s \in D$ ein stationärer Punkt von f (d.h. $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_s) = \boldsymbol{0}$). Dann gilt:

$H_f(\boldsymbol{x}_s)$ *negativ definit* $\Rightarrow$ f *besitzt lokales Maximum in* $\boldsymbol{x}_s$

$H_f(\boldsymbol{x}_s)$ *positiv definit* $\Rightarrow$ f *besitzt lokales Minimum in* $\boldsymbol{x}_s$

$H_f(\boldsymbol{x}_s)$ *indefinit* $\Rightarrow$ f *besitzt* ***kein*** *lokales Extremum in* $\boldsymbol{x}_s$

wobei $H_f(\boldsymbol{x}_s)$ die Hesse-Matrix von f im Punkt $\boldsymbol{x}_s$ bezeichnet.

Anmerkungen:

- Ist $H_f(\boldsymbol{x}_s)$ zwar semi-definit, aber nicht strikt definit, dann ist mit Hilfe dieses Satzes keine Aussage möglich (entspricht dem Fall $f''(x) = 0$ in der eindimensionalen Optimierung).
- Die Überprüfung der Definitheit von $H_f(\boldsymbol{x}_s)$ bei konkreten Zielfunkionen f lässt sich mit dem **Hurwitz-Kriterium** (s. Anhang zu diesem Kapitel) durchführen.

  Das Hurwitz-Kriterium setzt *symmetrische* Matrizen $A = H_f(\boldsymbol{x}_s)$ voraus; das bedeutet hier keine Einschränkung, denn der *Satz über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge*, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, garantiert diese Symmetrie, solange f zweimal stetig diff.bar ist.

Satz 1.3 (Hinreich. Bed. für globales Max. unter globaler Konkavität)
Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei stetig diff.bar und konkav (bzw. konvex) auf der offfenen und konvexen Menge D. Dann gilt: Ist $\boldsymbol{x} \in D$ ein Punkt mit $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, so ist $\boldsymbol{x}$ ein globales Maximum (bzw. Minimum) von f auf D.

Anmerkungen:

- Dieser Satz impliziert die **Existenz eines globalen Extremums**, sofern überhaupt ein stationärer Punkt (in der Menge D) existiert.
- Die Konvexität/Konkavität einer zweimal (diff.bare) Funktionen auf einer (konvexen, offenen) Menge ist äquivalent zur (Semi-)Definitheit der Hesse-Matrix auf dieser Menge (siehe Anhang 2). Eine Überprüfung auf Konvexität/Konkavität der Funktion kann also wiederum mit dem Hurwitz-Kriterium erfolgen.

1.1 Anhang 1: Hurwitz-Kriterium

Definition 1.4 *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt*

(a) ***positiv definit****, wenn* $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} > 0$ *für alle* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$

(b) ***negativ definit****, wenn* $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} < 0$ *für alle* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$

(c) ***positiv semi-definit****, wenn* $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} \geq 0$ *für alle* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$

(d) ***negativ semi-definit****, wenn* $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} \leq 0$ *für alle* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$

(e) ***indefinit****, wenn sie weder positiv noch negativ semi-definit ist.*

Definition 1.5 *Gegeben sei eine quadratische* $(n \times n)$*- Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Dann bezeichnet man

$$d_1 = a_{1,1}, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \qquad d_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \cdots, \qquad d_n = \det(A)$$

als ***Hauptunterdeterminanten*** *von A. Insbes. ist* d_n *die Determinante der Gesamtmatrix A.*

Satz 1.6 (Hurwitz-Kriterium) *Für eine symmetrische* $(n \times n)$*-Matrix A gilt:*

(a) *A* ***positiv definit*** *genau dann, wenn* $d_1 > 0,\ d_2 > 0,\ \ldots,\ d_n > 0$;

(b) *A* ***negativ definit*** *genau dann, wenn* $d_1 < 0,\ d_2 > 0,\ d_3 < 0\ ,\ \ldots,\ (-1)^n\, d_n > 0$;

(c) *A* ***positiv semi-definit*** *impliziert* $d_1 \geq 0,\ d_2 \geq 0,\ \ldots,\ d_n \geq 0$;

(d) *A* ***negativ semi-definit*** *impliziert* $d_1 \leq 0,\ d_2 \geq 0,\ d_3 \leq 0\ ,\ \ldots,\ (-1)^n\, d_n \geq 0$.

1.2 Anhang 2: Konvexität/Konkavität von (diff.baren) Fktnen

Eine **Menge** $D \subset \mathbb{R}^n$ **heißt konvex**, wenn mit je zwei Pkten $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in D$ auch die gesamte Verbindungslinie $\{\boldsymbol{x}_1 + \lambda\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\,|\,\lambda \in [0,1]\}$ in D liegt.

Eine auf einer (konvexen) Menge D definierte **Funktion** $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **heißt konkav**, wenn *sämtliche* Verbindungssekanten zweier Punkte des Graphen von f unterhalb des Graphen verlaufen; sie heißt **konvex**, wenn alle Verbindungssekanten oberhalb des Graphen liegen.

Hierbei sind die Ungleichungen im schwachen Sinne (‘oberhalb’ = ’oberhalb oder auf’ usw.) zu verstehen. D.h. wir verwenden die nicht-strikte Version des Konkavitäts- bzw. Konvexitäts-Begriffs (für die strikte Version sind die strikten Ungln. in der folgenden formalen Definition zu verwenden). Eine *lineare* Funktion $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ ist damit sowohl eine konvexe als auch eine konkave Funktion, und zwar auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.7 (Konvexität/Konkavität von Funktionen)
Gegeben eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *auf einer konvexen Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$.
Die Funktion heißt ***konvex*** (*bzw.* ***konkav***) *auf D, wenn für alle* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in D$ *gilt:*

$$f\big(\boldsymbol{x}_1 + \lambda\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\big) \leq f(\boldsymbol{x}_1) + \lambda\,\big(f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1)\big) \quad \text{für alle } \lambda \in [0,1]$$

$$\Big(\text{bzw.} \quad f\big(\boldsymbol{x}_1 + \lambda\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\big) \geq f(\boldsymbol{x}_1) + \lambda\,\big(f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1)\big) \quad \text{für alle } \lambda \in [0,1]\Big).$$

Satz 1.8 (Konvexität/Konkavitäskriterium für glatte Funktionen)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf einer konvexen Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$*. Dann gilt:*

f *konvex auf D* $\iff$ $H_f(\boldsymbol{x})$ *positiv semi-definit für alle* $\boldsymbol{x} \in D$;

f *konkav auf D* $\iff$ $H_f(\boldsymbol{x})$ *negativ semi-definit für alle* $\boldsymbol{x} \in D$.

Kapitel 2

Statische Optimierung unter Gleichungsrestriktionen (Lagrange)

2.1 Lagrange-Methode bei einer Restriktion

Satz 2.1 (Lagrange-Methode: Notwendige Bedingung)
*Es seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen auf einem Gebiet D im $\mathbb{R}^n$. Es sei $\boldsymbol{x}$ ein lokales Extremum von f unter der Restriktion $g(\boldsymbol{x}) = c$ und $\nabla g(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, das man als **Lagrange-Multiplikator** bezeichnet, mit*

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = -\lambda \, \nabla g(\boldsymbol{x}).$$

Die **Lagrange-Funktion** definieren wir als:

$$L(\lambda, \boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) + \lambda \, (g(\boldsymbol{x}) - c). \qquad \leftarrow \text{Lagrange-Fkt hier mit '}+\lambda\text{'}$$

Da $\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, \boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) - c, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i}(\lambda, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) + \lambda \, \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \;\; (i = 1, \dots, n)$

ist die notwendige Bedingung dieses Satzes zusammen mit der Nebenbedingung $g(\boldsymbol{x}) = c$ äquivalent zur Stationaritätsbedingung für ein unrestringiertes (aber $(n+1)$-dimensionales) Optimierungsproblem mit der Lagrange-Funktion $L(\lambda, x_1, \dots, x_n)$ als Zielfunktion.
Die **hinreichende Bedingung** für das Vorliegen einer lokalen Extremstelle verwendet die Hesse-Matrix von L (**geränderte Hesse-Matrix** oder *bordered Hessian matrix*):

$$H_L(\lambda, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Mit $\tilde{d}_k$ bezeichnen wir die Hauptunterdeterminanten der geränderten Hesse-Matrix:

$$\tilde{d}_k := \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_k} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_k} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_k} \end{vmatrix}$$

Die Indizierung der $\tilde{d}_k$ ist so gewählt, dass die re. untere Ecke der Teilmatrix auf $\frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_k}$ liegt.

Satz 2.2 (Lagrange-Methode: Hinreichende Bedingung)
Die Funktion f sei zweimal, die Funktion g einmal stetig differenzierbar. Es sei $(\lambda^*, \boldsymbol{x}^*)$ ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion $L(\lambda^*, \boldsymbol{x}^*)$ und $\boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{x}^*) \neq \mathbf{0}$. Dann gilt:

- *Sind die letzen $n-1$ Hauptunterdeterminanten von $H_L(\lambda^*, \boldsymbol{x}^*)$ alle negativ, d.h. $\tilde{d}_2 < 0, \ldots, \tilde{d}_n < 0$, so ist $\boldsymbol{x}^*$ eine lokale Minimalstelle des restringierten Problems.*
- *Haben die letzten $n-1$ Hauptunterdeterminanten von $H_L(\lambda^*, \boldsymbol{x}^*)$ alternierende Vorzeichen beginnend mit '+' (d.h. $\tilde{d}_2 > 0$, $\tilde{d}_3 < 0$, ...), so ist $\boldsymbol{x}^*$ eine lokale Maximalstelle des restringierten Problems.*

Interpretation des Lagrange-Multiplikators:

Der Lagrange-Multiplikator λ misst die Sensitivität des Extremwertes $f(\boldsymbol{x}^*)$ auf Änderungen im Niveau c der Restriktion. Er gibt die (momentane) Rate an, mit der sich Änderungen (im Niveau) der Restriktion auf Änderungen (im optimalen Wert) der Zielfkt. $f(\boldsymbol{x}^*)$ auswirken.

2.2 Lagrange-Methode mit mehreren Restriktionen

Satz 2.3 (Lagrange: Notwendige Bedingung bei mehreren Restriktionen)
Es seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diff.bare Funktionen auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $\boldsymbol{x}$ ein lokales Extremum von f unter den Restriktionen $g_j(\boldsymbol{x}) = c_j$, $j = 1, \ldots, m$. Die Vektoren $\boldsymbol{\nabla} g_j(\boldsymbol{x})$ seien linear unabhängig. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \boldsymbol{\nabla} g_j(\boldsymbol{x}).$$

Lagrange-Funktion: $\boxed{L(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c}\big)}$ $\leftarrow$ Lagrange-Fkt hier mit '$+\boldsymbol{\lambda}$'!
Die Bedingung, dass die Gradienten der Restriktionsfktnen, $\boldsymbol{\nabla} g_j$, im lokalen Extremum linear unabhängig sind, wird als **Qualifikationsbedingung** (constraint qualification) bezeichnet.

Satz 2.4 (Lagrange: Hinreichende Bedingung bei mehreren Restriktionen)
Die Funktion f sei zweimal, die Funktionen g_i einmal stetig differenzierbar. Es sei $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{x}^*)$ ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion $L(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})$, der die Qualifikationsbedingung erfüllt. Dann gilt für gerades m:

- *Sind die letzen $n-m$ Hauptunterdeterminanten von $H_L(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{x}^*)$, alle positiv, d.h. $\tilde{d}_{m+1} > 0, \ldots, \tilde{d}_n > 0$, so ist $\boldsymbol{x}^*$ eine lokale Minimalstelle des restringierten Problems.*
- *Haben die letzten $n-m$ Hauptunterdeterminanten von $H_L(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{x}^*)$ alternierende Vorzeichen beginnend mit '$-$' (d.h. $\tilde{d}_{m+1} < 0$, $\tilde{d}_{n-m+1} > 0, \ldots$), so ist $\boldsymbol{x}^*$ eine lokale Maximalstelle des restringierten Problems.*

Für ungerades m gelten die Bedingungen mit umgekehrten Vorzeichen der $\tilde{d}_j$ ($-\tilde{d}_j$ statt $\tilde{d}_j$).

Satz 2.5 (Hinreichende Bed. f. globale Extrema unter Konvexität/Konkavität)
Die Funktion f sei zweimal, die Funktionen g_j einmal stetig differenzierbar. Es sei $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{x}^*)$ ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion $L(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{x}^*)$. Wenn die Lagrange-Fkt. L als Funktion von $\boldsymbol{x}$ bei festgehaltenem $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$ konkav (bzw. konvex) ist, dann stellt $\boldsymbol{x}^*$ ein globales Maximum (bzw. Minimum) des restringierten Problems dar.

Die Voraussetzungen dieses Satzes (bzgl. eines Minimums) sind z.B. dann erfüllt, wenn die Zielfunktion konvex ist und für jedes $j = 1, \ldots, m$ entweder die Situation „$\lambda_j^* \leq 0$ und g_j konkav“ oder die Situation „$\lambda_j^* \geq 0$ und g_j konvex“ vorliegt.

Kapitel 3

Statische Optimierung unter Ungleichungsrestriktionen (Kuhn-Tucker)

3.1 Definition des Standard-Problems

Standard-Form des Problems unter Ungleichungs-Restriktionen:

$$\max f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{u. d. Nbdg.} \quad \begin{cases} g_1(x_1, \ldots x_n) \leq c_1 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots x_n) \leq c_m \end{cases} \tag{1}$$

Transformation in Standard-Form:

- *Minimierung*saufgabe in Standard-Form bringen durch Übergang zu $-f$;
- Ungleichungsrestriktionen der Form $h_j \geq b_j$ durch Multiplikation mit -1 umschreiben in $-h_j \leq -b_j$ (d.h. Übergang zu $g_j = -h_j$, $c_j = -b_j$);
- 'Einschlussrestriktionen' wie $0 \leq x_j \leq c_j$ in Standardform bringen durch Verdoppelung der Restriktionen: $-x_j \leq 0$ und $x_j \leq c_j$.

3.2 Kuhn-Tucker-Bedingungen

Def: Eine Ungleichungsrestriktion $g_j(\boldsymbol{x}) \leq c_j$ heißt **bindend** (oder aktiv) im Punkt $\boldsymbol{x}$, wenn die Restriktion als Gleichung erfüllt ist, d.h. wenn $g_j(\boldsymbol{x}) = c_j$.
Mit den Kuhn-Tucker-Bedingungen sucht man nach Punkten $\boldsymbol{x}^*$, wo sich der Gradient der Zielfunktion als Linearkombination der Gradienten der *bindenden* Restriktionen mit *nicht-negativen* Linearkoeffizienten λ_j darstellen lässt:

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) = \sum\nolimits_{j=1}^{m} \lambda_j \boldsymbol{\nabla} g_j(\boldsymbol{x}^*), \quad \text{wobei} \begin{cases} \lambda_j \geq 0 \text{ und} \\ \lambda_j = 0, \text{ falls Restr. } j \text{ nicht bindet} \end{cases}$$

Definition 3.1 (Kuhn-Tucker-Bedingungen) *Wir nennen einen Punkt $\boldsymbol{x}^*$ einen **Kuhn-Tucker-Punkt** des Problems* (1)*, wenn er die folgenden Bedingungen erfüllt:*

KT1: *Für* $i = 1, \ldots, n:$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) - \ldots - \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) = 0$

KT2: *Für* $j = 1, \ldots, m:$ $\quad \lambda_j \geq 0,$ *wobei* $\lambda_j = 0$ *ist, falls* $g_j(\boldsymbol{x}^*) < c_j$

KT3: *Für* $j = 1, \ldots, m:$ $\quad g_j(\boldsymbol{x}^*) \leq c_j$, *wobei* $g_j(\boldsymbol{x}^*) = c_j$ *ist, falls* $\lambda_j > 0$

KT1 lässt sich mittels der **Lagrange-Funktion**

$$\boxed{L(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) - \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) - \ldots - \lambda_m g_m(\boldsymbol{x})} \quad \leftarrow \text{ Lagrange-Fkt hier mit '}-\lambda_j\text{'!}$$

formulieren als

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\text{bzw.} \quad \boldsymbol{\nabla} L(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$$

KT2 und KT3 sind unter den Vorzeichenbedingungen $\lambda_j \geq 0$, $g_j(\boldsymbol{x}^*) \leq c_j$ äquivalent zueinander und drücken **komplementäre Schlupfbedingungen** zwischen λ_j und $g_j(\boldsymbol{x}^*) - c_j$ aus:

$$\lambda_j \geq 0, \quad g_j(\boldsymbol{x}^*) - c_j \leq 0, \quad \lambda_j \cdot \big(g_j(\boldsymbol{x}^*) - c_j\big) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

$$\text{bzw.} \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{c} \leq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}^\top \big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{c}\big) = 0$$

Zusammengefasst erhält man folgende äquivalente **Formulierung der Kuhn-Tucker-Bedingungen mittels Lagrange-Funktion und komplementärer Schlupfbedingungen:**

Ein Punkt $\boldsymbol{x}^*$ ist genau dann Kuhn-Tucker-Punkt des Problems (1), wenn

$$\text{KT1:} \quad \frac{\partial L}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\text{KT2/3:} \quad \lambda_j \geq 0, \quad g_j(\boldsymbol{x}^*) - c_j \leq 0, \quad \lambda_j \cdot \big(g_j(\boldsymbol{x}^*) - c_j\big) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

bzw.

$$\text{KT1:} \quad \boldsymbol{\nabla} L(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$$

$$\text{KT2/3:} \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{c} \leq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}^\top \big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{c}\big) = 0$$

Die KT-Bedingungen stellen im Wesentlichen notwendige Bedingungen für ein globales Maximum des restringierten Problems dar. 'Im Wesentlichen' bedeutet, dass im globalen Maximum eine zusätzliche Regularitätsbedingung an die Restriktionen, die sog. constraint qualification (**Qualifikationsbedingung**), erfüllt sein muss: Ein Punkt $\boldsymbol{x}$ erfüllt die Qualifikationsbedingung, wenn die Gradienten $\boldsymbol{\nabla} g_j(\boldsymbol{x})$ der in $\boldsymbol{x}$ bindenden Restriktionen linear unabhängig sind.

Satz 3.2 (Kuhn-Tucker als notwendige Bedingung)
Der Punkt $\boldsymbol{x}^*$ sei eine Lösung des Problems (1), in dem die Gradienten $\boldsymbol{\nabla} g_j(\boldsymbol{x}^*)$ der in $\boldsymbol{x}^*$ bindenden Restriktionen linear unabhängig sind. Dann erfüllt $\boldsymbol{x}^*$ die Kuhn-Tucker-Bedingungen.

Da die Qualifikationsbedingung in einem beliebigen Punkt $\boldsymbol{x}$ normalerweise erfüllt ist, ist sie i.d.R. auch im globalen Maximum $\boldsymbol{x}^*$ erfüllt. In der Praxis wird sie daher häufig ignoriert. In der Situation des folgenden Satzes kann sie *grundsätzlich* ignoriert werden:

Satz 3.3 (KT als hinreichende Bedingung unter Konvexität/Konkavität)
Wenn im Problem (1) die Lagrange-Funktion $L(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) - \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) - \ldots - \lambda_m g_m(\boldsymbol{x})$ als Funktion von $\boldsymbol{x}$ bei festgehaltenen $\lambda_j \geq 0$ konkav ist, so gilt: Wenn ein Punkt $\boldsymbol{x}^*$ die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt, so stellt er ein globales Max. des Problems (1) dar.

Anmerkungen:

- Die **Lagrange-Funktion ist hier mit „$-\lambda_j$“ zu bilden**.
- Die Voraussetzungen von Satz sind dann erfüllt, wenn **die Zielfunktion f konkav und alle Restriktionsfunktionen g_j konvex** sind.
- Es gilt sogar ein etwas stärkerer Satz: Die Konkavität von L in $\boldsymbol{x}$ wird nur bei den zum Kuhn-Tucker-Punkt $\boldsymbol{x}^*$ gehörigen $\lambda_j^* \geq 0$ benötigt.
- Der Satz gilt ohne die Qualifikationsbedingung.

Kapitel 4

Klassische Variationsrechnung

Unter einem **Variationsproblem** versteht man die Aufgabe, aus allen stetig diff.baren Funktionen $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, die die *Randbedingungen* $x(t_0) = x_0$ und $x(t_1) = x_1$ erfüllen, diejenigen zu finden, die das Integral

$$J(x) \;:=\; \int_{t_0}^{t_1} f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt$$

minimieren oder maximieren. Dabei sind x_0, x_1 gegebene Werte und f eine (mindestens stetige) Funktion der drei Variablen $t, x, \dot{x}$.

Satz 4.1 (Euler-Gleichung als notwendige Bedingung)
Es sei f eine (in allen drei Variablen) stetig diff.bare Funktion und x_0, x_1 gegebene Zahlen. ***Wenn*** *$x(t) = x^*(t)$ das Funktional*

$$J(x) \;:=\; \int_{t_0}^{t_1} f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt$$

unter allen auf $[t_0, t_1]$ stetig diff.baren Funktionen $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ und $x(t_1) = x_1$ maximiert oder minimiert, ***dann*** *erfüllt $x(t)$ die Euler-Gleichung*

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\Big) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \dot{x}).$$

Dabei bezeichnet $\frac{d}{dt}\big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\big)$ die totale Ableitung nach t der Funktion $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)$ (f partiell nach $\dot{x}$ ableiten, $t, x(t), \dot{x}(t)$ einsetzen und diesen Ausdruck nach t ableiten).
Dies lässt sich (via Kettenregel) auch ermitteln als

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\Big) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{x}} \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \cdot \ddot{x}(t)$$

Satz 4.2 (Euler-Gl. als hinreichende Bedingung unter globaler Konkavität)
Wenn in der Situation des vorhergehenden Satzes die Funktion f konkav (konvex) in $(x, \dot{x})$ ist für alle $t \in [t_0, t_1]$, dann ist eine Lösung $x(t) = x^*(t)$ der Euler-Gleichung eine Lösung des Maximierungsproblems (Minimierungsproblems).

Satz 4.3 (Transversalitätsbedingungen)
Ist $x = x^*$ eine stetig diff.bare Lösung des Variationsproblems unter der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ mit freiem $x(t_1)$, so löst x die Euler-Gl. auf $[t_0, t_1]$ und genügt neben $x(t_0) = x_0$ der Transversalitätsbedingung

$$\tfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\big(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1)\big) \;=\; 0$$

Unter der Endwertbedingung $x(t_1) \ge x_1$ gilt bei einem Maximierungsproblem:

$$\tfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\big(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1)\big)\ \begin{cases} \le 0, & \text{wenn } x(t_1) = x_1, \\ = 0, & \text{wenn } x(t_1) > x_1. \end{cases}$$

(Minimierungsproblem unter der Bedingung $x(t_1) \ge x_1$: Analog, nur $\tfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\big(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1)\big) \ge 0$.)

Effekt der Randvorgaben $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ auf Optimalwert:
Betrachte den Optimalwert des Zielfunktionals als Fkt. der Randvorgaben: $J^*(t_0, x_0, t_1, x_1)$.
In Punkten, wo $J^*(t_0, x_0, t_1, x_1)$ diff.bar nach dem Parameter ist, gilt:

(1a) $\dfrac{\partial J^*}{\partial x_0} = -\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}_{|t_0}$, (1b) $\dfrac{\partial J^*}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}_{|t_1}$; (2a) $\dfrac{\partial J^*}{\partial t_0} = -\big(f - \dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\,\dot{x}\big)_{|t_0}$, (2b) $\dfrac{\partial J^*}{\partial t_1} = \big(f - \dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\,\dot{x}\big)_{|t_1}$

Satz 4.4 (Erhaltungssatz für autonome Variationsprobleme)
Bei einem autonomen Variationsproblem, wo also $f(t, x, \dot{x}) =: F(x, \dot{x})$ nicht explizit von der Zeit abhängt, gilt

$$F\big(x(t), \dot{x}(t)\big) - \dot{x}(t)\,\tfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(x(t), \dot{x}(t)\big) \;=\; A \;=\; const$$

längs jeder Lösung $x(t)$ der Eulergleichung.

Satz 4.5 (Eulergl. für diskontiert-autonome Probleme)
Wenn $f(t, x, \dot{x})$ die Form $e^{-\varrho t}\,F(x, \dot{x})$ hat, dann ist die Eulergleichung äquivalent zu

$$\tfrac{d}{dt}\big(\tfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big) - \varrho\,\tfrac{\partial F}{\partial \dot{x}} \;=\; \tfrac{\partial F}{\partial x}$$

Anhang: Eine **lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung** ist eine Gleichung der Form

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x \;=\; c(t)$$

wobei $a(t), b(t)$ und $c(t)$ gegebene stetige Funktionen sind und die Fkt. $x = x(t)$ gesucht wird.
Die **allgemeine Lösung** einer solchen Differentialgleichung hat die Form

$$x(t) \;=\; A\,x_1(t) + B\,x_2(t) + x_0(t)$$

wobei

- $x_1(t), x_2(t)$ zwei linear unabhängige Lösungen der **homogenen Differentialgleichung** $\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x \;=\; 0$ sind, die auch als *Fundamentallösungen* bezeichnet werden.
- $x_0(t)$ (irgendeine) Lösung der inhomogenen DGL $\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x \;=\; c(t)$ ist; diese Fkt. wird als die (besser: eine) **partikuläre Lösung** bezeichnet (auch: 'spezielle Lösung').
- $A, B \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.

Rezepte zum Raten von Lösungen (insbes. der homog. DGl.):

- Wenn alle **Koeffizienten konstant** sind, dann führen für die Lösung der homogenen DGL i.d.R. Ansätze mit den Funktionen $e^{\lambda t}$, $\sin(\lambda t)$ und $\cos(\lambda t)$ (oder auch $e^{\lambda t}\sin(\omega t)$) zum Ziel: Einsetzen in die DGL führt zu einer Bestimmungsgl. für λ, die zweideutig lösbar, eindeutig lösbar oder unlösbar sein kann. Die partikuläre Lösung kann man, wenn $b \neq 0$, als Konstante $x_0(t) = c/b$ wählen (stationäre Lösung), wenn $b = 0$, $a \neq 0$ als $x_0(t) = c\,t/a$.
- Wenn die **Koeffizienten Potenzen** von t sind, dann führen oft Ansätze mit den Potenzen t^β (Einsetzen in die DGL führt zu einer Bestimmungsgleichung für β) oder Polynomen $\alpha + \beta t + \gamma t^2$ ($\Rightarrow$ Diff.Gl. liefert Bestimmungsgl. für α, β, γ) zum Ziel.

Kapitel 5

Kontrolltheorie I

Problemstellung: Zu gegebenen (stetig diff.baren) Funktionen $f(t,x,u)$ und $g(t,x,u)$ sowie Parametern $t_0 < t_1$ und x_0 werden Funktionen $x(t), u(t)$ gesucht, so dass

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt \quad u(t) \text{ unrestringiert } \forall\, t \in [t_0, t_1] \tag{1}$$

maximal wird unter der Bedingung, dass zu jedem Zeitpunkt $t \in [t_0, t_1]$ gilt:

$$\dot{x}(t) \;=\; g\big(t, x(t), u(t)\big), \quad x(t_0) \;=\; x_0, \quad x(t_1) \text{ frei} \tag{2}$$

Die Größe x nennt man die *Zustandsvariable*, die Größe u die *Kontrollvariable*. Die Fkt. $f(t,x,u)$ heißt die *Momentanertragsfunktion*. Die Funktion $g(t,x,u)$ bezeichnen wir als den *Kontrollmechanismus* (zur Steuerung der Änderungsrate $\dot{x}$ bei gegebenem Zustand x mittels u). Die Gl. (2) heißt die *Bewegungsgleichung* des Problems, das Integral in (1) das *Zielfunktional*.

Hamilton-Funktion:

$$H(t,\, x, u, \lambda) \;=\; f(t,\, x, u) + \lambda\, g(t,\, x, u) \tag{3}$$

Satz 5.1 (Maximumprinzip als notwendige Bedingung)
Die Funktionen $f(t,x,u)$, $g(t,x,u)$ aus (1) und (2) seien stetig und stetig diff.bar in x, u.

Wenn *$(x^*(t), u^*(t))$ das Problem (1), (2) lösen,* **dann** *existiert eine stetige diff.bare Funktion $\lambda^*(t) := \lambda(t)$, so dass für alle $t \in [t_0, t_1]$ gilt:*

$$u = u^*(t) \text{ maximiert } H\big(t, x^*(t), u, \lambda(t)\big) \quad \big(\text{(hier) unrestringiert, d.h. über } u \in \mathbb{R}\big) \tag{4}$$

$$\dot{\lambda}(t) \;=\; -H'_x\big(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)\big), \quad \lambda(t_1) = 0 \tag{5}$$

Dabei bezeichnet $H(t,x,u,\lambda) \;=\; f(t,x,u) + \lambda\, g(t,x,u)$ die Hamilton-Funktion des Problems. Die Größe λ wird als adjungierte Variable oder Ko-Zustandsvariable bezeichnet.

Zur analytischen Behandlung des Steuerungsproblems (1), (2) mit dem Maximumprinzip (4), (5) kann man folgendermaßen vorgehen:

1. Zunächst wird das optimale u durch Maximierung von $H(t,x,u,\lambda)$ über u gemäß (4) als Funktion $u^*(t,x,\lambda)$ von x und λ dargestellt.

2. Das Funktionenpaar $\big(x(t), \lambda(t)\big)$ erfüllt das **kanonische Differentialgleichungssystem**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= +H'_\lambda(t,x,u^*,\lambda), \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{\lambda} &= -H'_x(t,x,u^*,\lambda), \quad \lambda(t_1) = 0 \end{aligned}$$

   wobei u^* durch $u^*(t,x,\lambda)$ aus Schritt 1. zu ersetzen ist. Das liefert $(x^*(t), \lambda^*(t))$.

3. Zuletzt wird die optimale Steuerung als $u^*(t) = u^*\big(t, x^*(t), \lambda^*(t)\big)$ ermittelt.

Anstatt $u = u^*(t,x,\lambda)$ in die partiellen Ableitungen H'_x bzw. H'_λ einzusetzen, kann man u auch direkt im Hamilton $H(t,x,u,\lambda)$ substituieren, d.h. den **maximierten Hamilton**

$$H^\circ(t,x,\lambda) := \max_{u\in\mathbb{R}} H(t,x,u,\lambda) \qquad \big(= H\big(t,x,u^*(t,x,\lambda),\lambda\big)\big)$$

bilden. Mit H° ausgedrückt, lösen (x,λ) ein klassisches **Hamilton-System**:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= +H^{\circ\prime}_\lambda(t,x,\lambda), \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{\lambda} &= -H^{\circ\prime}_x(t,x,\lambda), \quad \lambda(t_1) = 0 \end{aligned}$$

Satz 5.2 (Maximumprinzip als hinreichende Beding. unter globaler Konkavität)
In der Situation des vorhergeh. Satzes seien $x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)$ Funktionen auf $[t_0,t_1]$, die das Maximumprinzip erfüllen u. das Hamilton-System u.d. Randbed. $x(t_0) = x_0$, $\lambda(t_1) = 0$ lösen.
Wenn dann (mit dem zu $x^*(t)$ adjungierten $\lambda^*(t)$) eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
– die Funktion $(x,u) \to H\big(t,x,u,\lambda^*(t)\big)$ ist konkav in (x,u) für jedes $t \in [t_0,t_1]$ (Mangasarin)
– oder (allgemeiner): die Funktion $x \to H^\circ(t,x,\lambda)$ ist konkav in x für jedes $t \in [t_0,t_1]$ (Arrow)
so ist $(x^*(t), u^*(t))$ Lösung des Problems (1), (2).

Zusammenhang zwischen Variationsrechnung und Maximumprinzip:

Satz 5.3 (Zusammenhang zwischen Eulergleichung und Maximumprinzip)
Das Maximumprinzip verwendet, wenn es auf ein Variationsproblem mit Momentanertragsfkt. $f(t,x,\dot{x})$ (wo $g(t,x,u) = u$ und die Kontrollvariable somit $\dot{x}$ ist) angewandt wird, mit der adjungierten Variable λ eine eigene Variable für die Größe $-f'_{\dot{x}}$.
Bei einem solchen Problem ist die adjungierte Gleichung $\dot{\lambda} = -H'_x$ die Euler-Gleichung.

Satz 5.4 (Reduktion eines Kontrolltheorie-Problems auf ein Variationsproblem)
Unter der Annahme eines ein-eindeutigen Zusammenhangs zwischen $\dot{x}$ und u im Kontrollmechanismus, d.h. dass sich die Gleichung $\dot{x} = g(t,x,u)$ bei gegebenem t,x für jedes $\dot{x}$ eindeutig nach u auflösen lässt $\big(u = u(t,x,\dot{x})$ mit $g\big(t,x,u(t,x,\dot{x})\big) = \dot{x}\big)$, impliziert das Max.Prinzip die Euler-Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ für das Variationsproblem

$$\max_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{f\big(t,x,u(t,x,\dot{x})\big)}_{=\varphi(t,x,\dot{x})}\, dt$$

Erhaltungssatz für autonome Probleme:

Satz 5.5 (Erhaltungssatz für autonome Probleme)
Wenn das Problem (1), (2) autonom ist, d.h. wenn $f(t,x,u) =: F(x,u)$ und $g(t,x,u) =: G(x,u)$ nicht explizit von der Zeit t abhängen ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$), bleibt der Wert der Hamilton-Funktion $H\big(x(t),u(t),\lambda(t)\big)$ konstant längs jeder Trajektorie $(x(t),u(t),\lambda(t))$, die das Maximumprinzip erfüllt (insbesondere längs jeder Lösungstrajektorie).
Im allgemeinen Fall gilt für jede Trajektorie $(x(t),u(t),\lambda(t))$, die das Maximumprinzip erfüllt:

$$\tfrac{d}{dt} H\big(t,x(t),u(t),\lambda(t)\big) = \tfrac{\partial H}{\partial t}\big(t,x(t),u(t),\lambda(t)\big)$$

Ein Satz aus der dynamischen Gleichgewichtsanalyse:

Satz 5.6 (Fallender stabiler Pfad zum Gleichgewicht beim Investitionsmodell)
Gegeben sei das optimale Steuerungsproblem $\max \int_0^T F(x,u)\,dt$, $x(0) = x_0$, $\dot{x} = G(x,u)$
mit folgenden Vorzeichen der partiellen Ableitungen von F und G (für alle (x,u)):

$$F'_x > 0,\ \ F''_{xx} \le 0,\ \ F'_u < 0,\ \ F''_{uu} < 0,\ \ F''_{xu} \le 0,\ \ G'_x < 0,\ \ G''_{xx} \le 0,\ \ G'_u > 0,\ \ G''_{uu} \le 0,\ \ G''_{xu} \le 0.$$

Wenn dann ein dynamischer Gleichgewichtspunkt (x_s,u_s,λ_s) existiert und $H(x,u,\lambda)$ konvex in (x,u) für alle λ ist, dann existiert ein stabiler Pfad zum Gleichgewicht und dieser ist sowohl im (x,λ)- als auch im (x,u)-Diagramm vom ‘fallenden Typ’.

5.1 Lineare Systeme von Diff.Gln mit konstanten Koeffizienten

Betrachte folgenden Spezialfall eines Systems von Differentialgleichungen $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$:

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) \,=\, A\,\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{b}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ gegeben sind und die Funktion $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ gesucht ist. Die allgemeine Lösung eines solchen Systems hat die Form

$$\boldsymbol{y}(t) \,=\, c_1\,\boldsymbol{y}_1(t) + \ldots + c_n\,\boldsymbol{y}_n(t) \;+\; \boldsymbol{y}_0(t)$$

wobei

- $\boldsymbol{y}_1(t), \ldots, \boldsymbol{y}_n(t)$ linear unabhängige Lösungen der **homogenen Differentialgleichung** $\dot{\boldsymbol{y}} - A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ sind; ein solches System von Lösungen nennt man ein *Fundamentalsystem.*
- $\boldsymbol{y}_0(t)$ (irgendeine) Lösung der inhomogenen DGL $\dot{\boldsymbol{y}} - A\boldsymbol{y} \,=\, -\boldsymbol{b}$ ist; diese Fkt. wird als die (besser: eine) **partikuläre Lösung** bezeichnet (auch: 'spezielle Lösung').
- $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.

Diese Aussagen gelten allgemein, auch wenn A und b von t abhängen. Im Folgenden betrachten wir nur noch den **Spezialfall, dass A und $\boldsymbol{b}$ konstant** sind. Außerdem sei die Matrix A regulär. Dann ist eine partikuläre Lösung durch die konstante Funktion $\boldsymbol{y}_0(t) \equiv A^{-1}\boldsymbol{b} =: \boldsymbol{y}_s$ gegeben (diese Lösung heißt die stationäre oder Gleichgewichtslösung, da $\dot{\boldsymbol{y}}_s = \boldsymbol{0}$). Es bleibt das Problem, n linear unabhängige Lösungen $\boldsymbol{y}_1(t), \ldots, \boldsymbol{y}_n(t)$ des homogenen Systems $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A\,\boldsymbol{y}(t)$ zu bestimmen. Deren Konstruktion beruht auf folgendem

Satz 5.7 (Exponentielle Fund.Lösung) *Wenn ein Vektor $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$ und eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existiert mit $A\,\boldsymbol{e} = \varepsilon\,\boldsymbol{e}$, dann löst die Funktion $\boldsymbol{y}(t) := \mathrm{e}^{\varepsilon t}\,\boldsymbol{e}$ die homogene DGL $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A\,\boldsymbol{y}(t)$.*

Definition 5.8 (Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$)
*Eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}$ heißt (reeller) **Eigenwert** der Matrix A, wenn die Matrix $A - \varepsilon I$ singulär ist. Ist ε ein Eigenwert von A, so heißt ein Vektor $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\boldsymbol{e} = \varepsilon\boldsymbol{e}$ ein zugehör. **Eigenvektor**. Die Menge aller Eigenvektoren zu einem Eigenwert ε ist (als Nullraum eines LGS) ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der als als der 'zu ε gehörige **Eigenraum**' bezeichnet wird. (Ein Eigenraum enthält neben dem Nullvektor also immer auch nicht-triviale Eigenvektoren $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$.)*

Da eine Matrix genau dann singulär ist, wenn sie die Determinante 0 hat, sind die Eigenwerte der Matrix A gerade die Nullstellen der Funktion $p(\varepsilon) \,=\, \det(A - \varepsilon I)$:

Satz 5.9 (Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms)
*Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Funktion $p(\varepsilon) \,=\, \det(A - \varepsilon I)$ ein Polynom vom Grad n in ε, das sog. **charakteristische Polynom** der Matrix.*
Die Eigenwerte einer Matrix sind gerade die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms.
(Eine $n\times n$-Matrix hat also maximal n reelle Eigenwerte. Führt man die Theorie im Komplexen durch und zählt mehrfache Nullstellen mit, so hat die Matrix genau n (komplexe) Eigenwerte.)

Wir können also Fundamentallösungen des Systems $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A\,\boldsymbol{y}(t)$ ermitteln, indem wir

1.) die reellen **Eigenwerte der Matrix A bestimmen**; dazu ermitteln wir das charakt. Polynom $p(\varepsilon) = \det(A - \varepsilon I)$ von A und bestimmen dessen Nullstellen, sagen wir $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$.

2.) für jeden Eigenwert ε_k einen zugehörigen (nicht-trivialen) **Eigenvektor $\boldsymbol{e}_k$ bestimmen**; dazu lösen wir das (singuläre) LGS $(A - \varepsilon_k I)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ nach $\boldsymbol{e} =: \boldsymbol{e}_k$ $(\neq \boldsymbol{0})$ auf.

Damit erhalten wir m linear unabhängige Fundamentallösungen $\boldsymbol{y}_k(t) = e^{\varepsilon_k t}\boldsymbol{e}_k$, $k = 1, \ldots, m$. Wenn $m = n$ ist (d.h. wenn die Matrix A genau n verschiedene reelle Eigenwerte hat), dann haben wir auf diese Weise ein komplettes Fundamentalsystem der DGL gefunden.

Bei den in der dynamischen Optimierung auftretenden Hamilton-Systemen hat man i.d.R. genau diese Situation: n verschiedene reelle Eigenwerte der $n \times n$ Koeffizientenmatrix A.

Kapitel 6

Kontrolltheorie Ib ('current value')

Probleme der Form:

$$\max \int_0^T e^{-\varrho t}\, \check{f}\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(t) = g\big(t, x(t), u(t)\big) \tag{$\check{1}$}$$

Der **current-value Hamilton**:

$$\check{H}(t, x, u, \check{\lambda}) := \check{f}(t, x, u) + \check{\lambda} \cdot g(t, x, u)$$

tritt an die Stelle des bisherigen **present-value Hamilton**:

$$H(t, x, u, \lambda) := f(t, x, u) + \lambda \cdot g(t, x, u)$$

Satz 6.1 (Maximumprinzip in laufender Bewertung (current value Hamilton))
Wenn $[t_0, t_1] = [0, T]$ ist und der Momentanertrag $f(t, x, u)$ die Form $e^{-\varrho t}\check{f}(t, x, u)$ hat, gilt mit dem ***Hamilton in laufender Bewertung*** $\check{H}(t, x, u, \check{\lambda}) := \check{f}(t, x, u) + \check{\lambda} \cdot g(t, x, u)$:
Wenn $(x^*(t), u^*(t))$ das Problem ($\check{1}$) löst, dann existiert eine stetige diff.bare Funktion $\check{\lambda}(t)$, so dass für alle $t \in [0, T]$ gilt:

$$u = u^*(t) \text{ maximiert } \check{H}\big(t, x^*(t), u, \check{\lambda}(t)\big) \quad \text{((hier) unrestringiert, d.h. über } u \in \mathbb{R})$$
$$\dot{\check{\lambda}}(t) - \varrho\, \check{\lambda}(t) = -\check{H}'_x\big(t, x^*(t), u^*(t), \check{\lambda}(t)\big), \qquad e^{-\varrho T}\, \check{\lambda}(T) = 0$$

Wenn $\check{H}$ als Funktion von x und u bei jedem $\check{\lambda} = \check{\lambda}(t)$ konkav ist, sind diese Bedingungen auch hinreichend zur Lösung des Steuerungsproblems ($\check{1}$).

Unterdrückt man die current-value-Kennzeichnung (indem man H statt $\check{H}$ und λ statt $\check{\lambda}$ schreibt), so ergibt sich das **kanonische Differentialgleichungssystem im current-value** als

$$\begin{aligned} \dot{x} &= +H'_\lambda, & x(0) &= x_0 \\ \dot{\lambda} &= -H'_x + \varrho\,\lambda, & \lambda(T) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Satz zur dynamischen Gleichgewichtsanalyse im current value:

Satz 6.2 (Fallender stabiler Pfad zum Gleichgewicht beim Investitionsmodell)
Gegeben sei das optimale Steuerungsproblem $\max \int_0^T e^{-\varrho t} F(x, u)\, dt,\ x(0) = x_0,\ \dot{x} = G(x, u)$ *mit folgenden Vorzeichen der partiellen Ableitungen von F und G (für alle (x, u)):*

$$F'_x > 0, \quad F''_{xx} \le 0, \quad F'_u < 0, \quad F''_{uu} < 0, \quad F''_{xu} \le 0, \quad G'_x < 0, \quad G''_{xx} \le 0, \quad G'_u > 0, \quad G''_{uu} \le 0, \quad G''_{xu} \le 0.$$

Wenn dann (im current value) ein dynamischer Gleichgewichtspunkt (x_s, u_s, λ_s) existiert und die Hamilton-Fkt $H(x, u, \lambda)$ konvex in (x, u) für alle λ ist, dann existiert ein stabiler Pfad zum Gleichgewicht und dieser ist sowohl im (x, λ)- als auch im (x, u)-Diagramm vom 'fallenden Typ' (d.h. $x(t)$ ist in der Initialphase gegenläufig sowohl zu $\lambda(t)$ als auch $u(t)$.)
Die Aussage gilt global, d.h. für alle $\varrho \ge 0$ und für alle Anfangswerte x_0 von $x(t)$.

Kapitel 7

Kontrolltheorie II (restring. Kontrolle)

Problemstellung:

$$\max \int_0^T f\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt \;+\; S\big(T, x(T)\big), \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) \;=\; g\big(t, x(t), u(t)\big), \quad x(0) \;=\; x_0 \tag{2}$$

unter einer der folgenden Endbedingungen

(a) $x(T) = x_1$, (b) $x(T)$ frei oder (c) $x(T) \geq x_1$

Zulässige Lösungen: Von der gesuchten Funktion $u(t)$ wird nur noch verlangt, dass sie *stückweise stetig* ist, d.h. $u(t)$ kann in endlich vielen Punkten $t \in (0, T)$ Sprung- oder Knickstellen haben.
Wenn $u(t)$ stückweise stetig ist, wird unter einer '*Lösung*' x von $\dot{x} = g(t, x, u)$ eine *stetige* Funktion $x(t)$, die der Diffgl. mit Ausnahme der t, die Sprungstellen von u sind, genügt ($t \to x(t)$ ist dann eine *stetige, stückweise stetig diff.bare* Fkt.)

Hamilton-Funktion: Das Maximumprinzip als allgemeingültiges Prinzip gilt nur dann, wenn in der Hamilton-Funktion ein zusätzlicher Lagrange-Parameter $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ vorgesehen wird:

$$H(t, x, \lambda_0, \lambda, u) \;:=\; \lambda_0\, f(t, x, u) + \lambda \cdot g(t, x, u) \tag{3}$$

wobei λ_0 und λ nicht beide gleichzeitig Null sind. Die Möglichkeit, dass $\lambda_0 = 0$ ist, kann man jedoch als theoretischen Ausnahmefall betrachten, der bei 'normalen Problemen' nicht auftritt.
Die **Hamilton-Funktion im Normallfall** $\lambda_0 = 1$ ist wie bisher:

$$H(t, x, \lambda, u) = f(t, x, u) + \lambda\, g(t, x, u) \tag{3'}$$

Satz 7.1 (Pontryagin'sches Maximumprinzip)
Die Fktnen. $f(t, x, u)$, $g(t, x, u)$, $S(t, x)$ aus (1),(2) seien stetig und stetig diff.bar in x.

Wenn $(x^*(t), u^*(t)) =: (x(t), u(t))$ *das Problem* (1), (2) *mit $x(t)$ als stetiger, stückweise stetig diff.barer Fkt. und $u(t)$ als stückweise stetiger Fkt. auf $[0, T]$ lösen,*
dann *existiert eine Konstante $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ und eine stetige, stückweise stetig diff.bare Funktion $\lambda(t)$ mit $(\lambda_0, \lambda(t)) \neq (0, 0)$ für alle $t \in [0, T]$, so dass für alle $t \in [0, T]$ gilt:*

(M) $u = u(t)$ *maximiert* $H\big(t, x(t), u, \lambda_0, \lambda(t)\big)$ *auf* $\mathcal{U}$ (*d.h. für* $u \in \mathcal{U}$)

(A) $\dot{\lambda}(t) \;=\; -H'_x\big(t, x(t), u(t), \lambda_0, \lambda(t)\big)$ (*mit Ausnahme der Sprungstellen von* u)

Außerdem gelten die zu (a), (b) *bzw.* (c) *gehörigen* ***Transversalitätsbedingungen****:*

(a) [*d.h.* $x(T) = x_1$] $\lambda(T)$ *frei*

(b) [*d.h.* $x(T)$ *frei*] $\lambda(T) \;=\; \lambda_0\, S'_x(T, x(T))$

(c) [*d.h.* $x(T) \geq x_1$] $\lambda(T) \;\geq\; \lambda_0\, S'_x(T, x(T))$; $\lambda(T) \;=\; \lambda_0\, S'_x(T, x(T))$, *falls* $x(T) > x_1$

Satz 7.2 (Max.Prinzip als hinreichende Bedingung nach Mangasarin)
In der Situation des vorhergehenden Satzes seien $x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)$ Funktionen auf $[0, T]$, die die notwendigen Bedingungen des Satzes mit $\lambda_0 = 1$ erfüllen. Wenn dann
– der Kontrollbereich $\mathcal{U}$ eine konvexe Menge ist und
– die Hamilton-Fkt. $H(t, x, u, \lambda^*(t))$ konkav in (x, u) für alle $t \in [0, T]$ ist und
– die Terminalwert-Funktion $S(t, x)$ konkav in x ist,
dann ist $(x^*(t), u^*(t))$ eine Lösung des Problems (1),(2). Wenn darüber hinaus H sogar streng konkav in (x, u) ist, dann ist $(x^*(t), u^*(t))$ die einzige optimale Lösung.

Sensitivität des Optimalwerts auf die Randvorgaben:
Betrachte ein Problem mit Anfangs- und Endvorgaben vom Typ (a):

$$\max_{u \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt, \quad \dot{x} = g(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad u \in \mathcal{U}$$

Ist $u^*(t)$ eine Lösung des Problems mit zugehöriger Zustandstrajektorie $x^*(t)$, so stellt der Wert, der sich bei Einsetzen der Lösung in das Zielfunktional ergibt, also

$$V^*(t_0, x_0, t_1, x_1) := \int_{t_0}^{t_1} f\big(t, x^*(t), u^*(t)\big)\, dt$$

den **Optimalwert** dar, der unter den Randvorgaben t_0, x_0, t_1, x_1 realisiert werden kann.

In Punkten, wo $V^*(t_0, x_0, t_1, x_1)$ diff.bar nach dem jeweiligen Parameter ist, gilt:

$$\text{(1a)}\ \frac{\partial V^*}{\partial x_0} = \lambda^*(t_0), \quad \text{(1b)}\ \frac{\partial V^*}{\partial x_1} = -\lambda^*(t_1); \quad \text{(2a)}\ \frac{\partial V^*}{\partial t_0} = -H^*(t_0), \quad \text{(2b)}\ \frac{\partial V^*}{\partial t_1} = H^*(t_1)$$

wobei $H^*(t) := H\big(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)\big)$

Konsequenzen:
- $\lambda^*(t_0) > 0 \Rightarrow$ Vergrößerung von x_0 würde zu einer Vergrößerung der Zielgröße (V^*) führen
- $\lambda^*(t_1) > 0 \Rightarrow$ Vergrößerung von x_1 würde zu einer Verringerung der Zielgröße (V^*) führen
- $H^*(t_0) > 0 \Rightarrow$ Vergrößerung von t_0 würde zu einer Verringerung der Zielgröße (V^*) führen
- $H^*(t_1) > 0 \Rightarrow$ Vergrößerung von t_1 würde zu einer Vergrößerung der Zielgröße (V^*) führen
- $H^*(t_1) < 0 \Rightarrow$ Verkleinerung von t_1 würde zu einer Vergrößerung der Zielgröße (V^*) führen

Insbesondere ist $H^*(t_1) = 0$ eine notwendige Bedingung dafür, dass keine Veränderung von t_1, weder Vergrößerung noch Verkleinerung, zu einer Verbesserung der Zielgröße V^* führt.

Maximumprinzip bei freiem Endzeitpunkt T

Satz 7.3 (Maximumprinzip bei freiem T)
Die Fktnen $f(t, x, u)$, $g(t, x, u)$, $S(t, x)$ (definiert $\forall\, t \geq 0$) seien stetig u. stetig diff.bar in x,t. Wenn $x^*(t), u^*(t)$ und $0 < T^* < \infty$ eine Lösung des Problems

$$\max_{u \in \mathcal{U},\ T > 0} \int_0^T f\big(t, x, u\big)\, dt + S\big(T, x(T)\big), \quad \dot{x}(t) = g\big(t, x(t), u(t)\big), \quad x(0) = x_0, \quad u \in \mathcal{U}$$

unter einer der Endbedingungen (a), (b) oder (c) in $T = T^*$ darstellen,
dann sind alle Bedingungen des Maximumprinzips auf $[0, T^*]$ erfüllt und zusätzlich gilt

$$H\big(T^*, x^*(T^*), u^*(T^*), \lambda_0, \lambda^*(T^*)\big) = -\lambda_0\, S_t'\big(T^*, x^*(T^*)\big)$$

Zusatz: Bei Restriktion von T auf ein Intervall $[T_0, T_1]$ mit $0 < T_0 < T_1 < \infty$ gilt dies als:

$$H\big(T^*, x^*(T^*), u^*(T^*), \lambda_0, \lambda^*(T^*)\big) \begin{cases} \leq -\lambda_0\, S_t'\big(T^*, x^*(T^*)\big) & \textit{falls } T^* = T_0 \\ = -\lambda_0\, S_t'\big(T^*, x^*(T^*)\big) & \textit{falls } T_0 < T^* < T_1 \\ \geq -\lambda_0\, S_t'\big(T^*, x^*(T^*)\big) & \textit{falls } T^* = T_1 \end{cases}$$

Kapitel 8

Kontrolltheorie III (Systeme)

Problemstellung: n Zustandsvariablen $(x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{x}$, m Kontrollvariablen $(u_1, \ldots, u_m) = \boldsymbol{u}$

$$\max \left\{ \int_0^T f\big(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big)\, dt \;+\; S\big(T, \boldsymbol{x}(T)\big) \right\}, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \tag{1}$$

Dynamik der Zustandsgrößen $\boldsymbol{x}$ beschrieben durch Bewegungsgleichungen mit Anfangsbed.gen

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) &=& g_1\big(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big),\ x_1(0) = x_1^0 \\ \cdots && \\ \dot{x}_n(t) &=& g_n\big(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big),\ x_n(0) = x_n^0 \end{array}\right\} \text{kurz: } \dot{\boldsymbol{x}}(t) \;=\; \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big),\ \boldsymbol{x}(0) \;=\; \boldsymbol{x}^0 \tag{2}$$

Außerdem (potentielle) Endbedingungen für den Zustand $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x_i(T) = x_i^1, & i = 1, \ldots, n_a \\ \text{(b)} & x_i(T) \text{ frei }, & i = n_a + 1, \ldots, n_b \\ \text{(c)} & x_i(T) \geq x_i^1 & i = n_b + 1, \ldots, n \end{array} \tag{3}$$

Im Maximumprinzip wird für jede der Zustandsvariablen x_i eine Ko-Zustandsvariable λ_i benötigt $\Rightarrow \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$. Die Hamilton-Funktion lautet im Normalfall

$$H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) \;=\; f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \quad \Big(:= f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i\, g_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \Big)$$

Aus Gründen der Allgemeingültigkeit muss in der Hamilton-Funktion ein weiterer Skalar $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ vorgesehen werden (bei 'wohlgestellten Problemen' ist immer $\lambda_0 = 1$):

$$H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) \;=\; \lambda_0\, f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

Satz 8.1 (Pontryagin'sches Maximumprinzip)
Die Fktnen. $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $S(t, \boldsymbol{x})$ aus (1),(2) seien stetig und stetig diff.bar in $\boldsymbol{x}$.
***Wenn** $(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t)) =: (\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ das Problem (1), (2), (3) mit $\boldsymbol{x}(t)$ als stetiger, stückweise stetig diff.barer Fkt. und $\boldsymbol{u}(t)$ als stückweise stetiger Fkt. auf $[0, T]$ lösen,*
***dann** existiert eine Konstante $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ und stetige, stückweise stetig diff.bare Funktionen $(\lambda_1(t), \ldots \lambda_n(t)) =: \boldsymbol{\lambda}(t)$ mit $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t)) \neq (0, \boldsymbol{0})\ \forall\, t \in [0, T]$, so dass für alle $t \in [0, T]$ gilt:*

(M) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$ *maximiert* $H\big(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}(t)\big)$ *auf* $\mathcal{U}$ *(d.h. für $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$)*

(A) $\dot{\lambda}_i(t) = -H'_{x_i}\big(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\big), \quad i = 1, \ldots, n$ *(außerhalb Sprungstellen von $\boldsymbol{u}$)*

*Außerdem gelten die **Transversalitätsbedingungen**:*

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & x_i(T) = x_i^1 & \Rightarrow & \lambda_i(T) \textit{ frei} \\ \text{(b)} & x_i(T) \textit{ frei} & \Rightarrow & \lambda_i(T) \;=\; \lambda_0\, S'_{x_i}(T, \boldsymbol{x}(T)) \\ \text{(c)} & x_i(T) \geq x_i^1 & \Rightarrow & \lambda_i(T) \begin{cases} \geq \lambda_0\, S'_{x_i}(T, \boldsymbol{x}(T)) & \textit{falls } x_i(T) = x_i^1 \\ = \lambda_0\, S'_{x_i}(T, \boldsymbol{x}(T)) & \textit{falls } x_i(T) > x_i^1 \end{cases} \end{array}$$

Das Maximumprinzip zerlegt die Lösung i.w. in ein m-dimensionales statisches Optimierungsproblem von H über $\boldsymbol{u}$ mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$ als Parametern und ein $2n$-dimensionalen DGL-System in $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$ mit $\boldsymbol{u}$ als Parameter, das unter n Anfangs- und n Transversalitätsbedingungen in $t = T$ zu lösen ist. Das System von Diff.Gln in $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ ist ein **Hamilton-System**:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{(A)} & \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) & = & -H'_{\boldsymbol{x}}\big(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}^*(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)),\ \boldsymbol{\lambda}(t)\big) \\ \text{(B)} & \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & +H'_{\boldsymbol{\lambda}}\big(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}^*(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)),\ \boldsymbol{\lambda}(t)\big) \end{array}\right\} \text{ System von } 2n \text{ Diff.gln in } \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}$$

Erhaltungssatz: Die Hamilton-Funktion längs des optimalen Pfades $t \to H\big(t, \boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)\big)$ ist immer stetig (auch in Unstetigkeitspunkten von $\boldsymbol{u}$). In Stetigkeitspunkten von $\boldsymbol{u}^*(t)$ ist $t \to H\big(t, \boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)\big)$ sogar diff.bar mit $\frac{d}{dt} H\big(t, \boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)\big) = \big(\frac{\partial}{\partial t} H\big)\big(t, \boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)\big)$

Maximumprinzip als hinreichende Bedingung

Satz 8.2 (Max.Prinzip als hinreichende Bedingung nach Mangasarin)
In der Situation von Satz 8.1 seien $\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)$ Funktionen auf $[0, T]$, die die notwendigen Bedingungen des Satzes mit $\lambda_0 = 1$ erfüllen. Wenn dann

– der Kontrollbereich $\mathcal{U}$ eine konvexe Menge in $\mathbb{R}^m$ ist und
– die Hamilton-Fkt. $H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}^*(t))$ konkav in $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ für alle $t \in [0, T]$ ist und
– die Terminalwert-Funktion $S(T, \boldsymbol{x})$ konkav in $\boldsymbol{x}$ ist,

dann ist $(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t))$ eine Lösung des Problems (1),(2),(3). *Wenn darüber hinaus H sogar streng konkav in $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ ist, dann ist $(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t))$ die einzige optimale Lösung.*

Satz 8.3 (Max.Prinzip als hinreichende Bedingung nach Arrow)
In der Situation von Satz 8.1 seien $\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)$ Funktionen auf $[0, T]$, die die notwendigen Bedingungen des Satzes mit $\lambda_0 = 1$ erfüllen. (Außerdem sei $S(t, \boldsymbol{x}) = 0$).
Wenn dann die über $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ maximierte Hamilton-Fkt.

$$\boldsymbol{x} \to H^\circ(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*(t)) := \max_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}^*(t))$$

konkav in $\boldsymbol{x}$ ist für alle $t \in [0, T]$, dann löst $(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t))$ das Optimierungsproblem (1),(2),(3).

Effekt der Randvorgaben auf Optimalwert V (Schattenpreis-Interpretation von $\lambda(T)$, $H(T)$)
Betrachte den erreichten Optimalwert eines Problems unter Endbedingungen vom Typ (a) ohne Terminalwert als Funktion der Randvorgaben $(t_0, \boldsymbol{x}_0), (t_1, \boldsymbol{x}_1)$:

$$V^*(t_0, \boldsymbol{x}_0, t_1, \boldsymbol{x}_1) := \int_{t_0}^{t_1} f(t, \boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t))\, dt,$$

Der Effekt, den die 'räumlichen' Randvorgaben $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ auf den erreichbaren Wert haben, wird erfasst von der adjungierten Funktion $\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}^*(t)$, derjenige der zeitlichen Vorgaben t_0, t_1 auf V^* von der Hamilton-Fkt. $H^*(t)$, die im zeitl. Verlauf entlang der Lösungstrajektorie entsteht:

$$H^*(t) := H(t, \boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t))$$

In Punkten, wo $V^*(t_0, x_0, t_1, x_1)$ diff.bar nach dem Parameter ist, gilt:

$$\text{(1a)}\ \frac{\partial V^*}{\partial x_i^0} = \lambda_i^*(t_0), \quad \text{(1b)}\ \frac{\partial V^*}{\partial x_i^1} = -\lambda_i^*(t_1); \quad \text{(2a)}\ \frac{\partial V^*}{\partial t_0} = -H^*(t_0), \quad \text{(2b)}\ \frac{\partial V^*}{\partial t_1} = H^*(t_1)$$

Maximumprinzip bei freiem T

Satz 8.4 (Maximumprinzip bei freiem T)
Die Fktnen $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $g(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $S(t, \boldsymbol{x})$ seien für alle $t \geq 0$ definiert und genügend oft diff.bar. Wenn $\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t)$ und $0 < T^* < \infty$ eine Lösung des Problems (1),(2),(3) *mit freiem $T > 0$ ist (d.h. zusätzlich wird über T optimiert), dann sind alle Bedingungen des Maximumprinzips von Satz 8.1 auf $[0, T^*]$ erfüllt und zusätzlich gilt*

$$H\big(T^*, \boldsymbol{x}^*(T^*), \boldsymbol{u}^*(T^*), \boldsymbol{\lambda}^*(T^*)\big) = -\lambda_0\, S'_t\big(T^*, \boldsymbol{x}^*(T^*)\big)$$

Kapitel 9

Kontrolltheorie IV (Gemischte Zustands-/Kontrollrestriktionen)

9.1 Zustandsabhängige Restriktionen an die Kontrolle

Problemstellung:

$$\max_{\boldsymbol{u}(t)\,\in\,\mathcal{U}(t,\boldsymbol{x}(t))} \int_0^T f\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)\,dt + S\big(T,\boldsymbol{x}(T)\big), \quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0, \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) \;=\; \boldsymbol{g}\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big) \tag{9.1}$$

unter Endbedingungen vom Typ (a) $x_i(T)=x_i^1$; (b) $x_i(T)$ frei oder (c) $x_i(T)\geq x_i^1$.
Es sind nun **zustandsabhängige Restriktionen an die Kontrolle** zugelassen, Form:

$$\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}(t,\boldsymbol{x}) \iff \left\{\begin{array}{ccc} h_1(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) & \geq & 0 \\ & \vdots & \\ h_s(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) & \geq & 0 \end{array}\right\} \quad \text{bzw. kompakt:} \quad \boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\geq\boldsymbol{0} \tag{9.2}$$

Benötigte **Qualifikationsbedingung**:

$$\text{Die Matrix} \quad \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^\top & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial h_s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^\top & 0 & \cdots & h_s \end{pmatrix} \quad \text{hat vollen Rang } s \tag{9.3}$$

Hamilton-Funktion:

$$H\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}\big) \;:=\; \lambda_0\, f\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\big)+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{g}\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\big) \tag{9.4}$$

Lagrange-Funktion:

$$L\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\big) \;:=\; H\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}\big) \;+\; \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \tag{9.5}$$

Satz 9.1 (Maximumprinzip bei zustandsabhäng. Restriktionen an die Kontrolle)
Die Funktionen $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, $S(t,\boldsymbol{x})$ seien stetig diff.bar in allen Argumenten und es gelte die Qualifikationsbed. (9.3) (*diese muss nur in der Lösung erfüllt sein.*).
Wenn $\big(\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}^*(t)\big)=:\big(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ *das Problem (9.2), (9.1) mit* $\boldsymbol{x}(t)$ *als stetiger, stückweise stetig diff.barer Fkt. und* $\boldsymbol{u}(t)$ *als stückweise stetiger Fkt. auf* $[0,T]$ *lösen,*
dann *existieren eine Konstante* $\lambda_0\in\{0,1\}$, *stetige, stückweise stetig diff.bare Kozustandsfunktionen* $\big(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)\big)=:\boldsymbol{\lambda}(t)$ *und stückweise stetige Multiplikatorfunktionen* $\big(\mu_1(t)\ldots,\mu_s(t)\big)=:\boldsymbol{\mu}(t)$, *mit* $\big(\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t),\boldsymbol{\mu}(t)\big)\neq\boldsymbol{0}\;\forall\,t\in[0,T]$, *so dass an jeder Stetigkeitsstelle* $t\in[0,T]$ *von* $\boldsymbol{u}(t)$ *folgende Beziehungen gelten:*

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t) \text{ maximiert } H\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t)\big) \text{ auf } \mathcal{U}\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big) \text{ (d.h. für } \boldsymbol{h}\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}\big)\geq\boldsymbol{0}), \tag{9.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \;=\; -L'_{\boldsymbol{x}}\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t),\boldsymbol{\mu}(t)\big). \tag{9.7}$$

Außerdem gelten die ***Transveralitätsbedingungen in der bisherigen Form.***

9.2 Reine Zustandsrestriktionen

Problemstellung:

$$\max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}(t,\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\mathcal{X}(t)} \int_0^T f\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)\,dt+S\big(T,\boldsymbol{x}(T)\big), \quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0, \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{g}\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big) \tag{9.8}$$

unter Endbedingungen vom Typ (a) $x_i(T)=x_i^1$; (b) $x_i(T)$ frei oder (c) $x_i(T)\geq x_i^1$. Zusätzlich zu den bisherigen (möglicherweise zustandsabhängigen) Restriktionen an die Kontrolle $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}(t,\boldsymbol{x})$, wie in (9.2), können nun auch **reine Zustandsrestriktionen** $\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}(t)$ bestehen, Form:

$$\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}(t) \iff \left\{\begin{array}{ccc} k_1(t,\boldsymbol{x}) & \geq & 0 \\ & \vdots & \\ k_r(t,\boldsymbol{x}) & \geq & 0 \end{array}\right\} \quad \text{bzw. kompakt:} \quad \boldsymbol{k}(t,\boldsymbol{x})\geq\boldsymbol{0} \tag{9.9}$$

Qualifikationsbedingung: Mit $d_i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}):=\frac{\partial}{\partial t}k_i(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}k_i(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ soll gelten:

$$\text{Die Matrix} \quad \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^\top & h_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial h_s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^\top & 0 & \cdots & h_s & 0 & \cdots & 0 \\ \left(\frac{\partial d_1}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^\top & 0 & \cdots & 0 & d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial d_r}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^\top & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d_r \end{pmatrix} \quad \text{hat den vollen Rang } s+r \tag{9.10}$$

Hamilton-Funktion:

$$H\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}\big) := \lambda_0\,f\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\big)+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{g}\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\big) \tag{9.11}$$

Bei der **direkten Methode** des folgenden Satzes wird die Lagrange-Fkt. gebildet, indem die Zustandstrestriktionen *direkt* adjungiert werden. Mit $\boldsymbol{\mu}$ als den Lagrange-Multiplikatoren der Kontrollrestriktionen und $\boldsymbol{\nu}$ als denjenigen der Zustandstrestriktionen lautet die Lagrange-Fkt.:

$$L\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\big) := H\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}\big) + \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{k}(t,\boldsymbol{x}) \tag{9.12}$$

Satz 9.2 (Max.Prinzip bei reinen Zustandsrestriktionen (unter Regularitätsbed.))
Die Funktionen $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{k}(t,\boldsymbol{x})$, $S(t,\boldsymbol{x})$ *seien stetig diff.bar in allen Argumenten und es gelte die Qualifikationsbedingung* (9.10) (*in der Lösung des Problems*). *Außerdem sei die Hamilton-Fkt.* (9.11) *streng konkav in* $\boldsymbol{u}$ *auf* $\mathcal{U}(t,\boldsymbol{x})$ ($\forall t,\boldsymbol{x}$, $\mathcal{U}(t,\boldsymbol{x})$ konvex).
Wenn $\big(\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}^*(t)\big)=:\big(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ *das Problem* (9.8), (9.9) *mit* $\boldsymbol{x}(t)$ *als stetiger, stückweise stetig diff.barer Fkt. und* $\boldsymbol{u}(t)$ *als stückweise stetiger Fkt. auf* $[0,T]$ *lösen,*
dann *existieren eine Konstante* $\lambda_0\in\{0,1\}$, *stetige, stückweise stetig diff.bare Kozustandsfunktionen* $\big(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)\big)=:\boldsymbol{\lambda}(t)$ *und stückweise stetige Multiplikatorfunktionen* $\big(\mu_1(t)\ldots,\mu_s(t)\big)=:\boldsymbol{\mu}(t)$ *sowie* $\big(\nu_1(t)\ldots,\nu_r(t)\big)=:\boldsymbol{\nu}(t)$ *mit* $\big(\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t),\boldsymbol{\mu}(t),\boldsymbol{\nu}(t)\big)\neq\boldsymbol{0}$ $\forall\,t\in[0,T]$, *so dass an jeder Stetigkeitsstelle* $t\in[0,T]$ *von* $\boldsymbol{u}(t)$ *folgende Beziehungen gelten:*

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t) \text{ maximiert } H\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t)\big) \text{ auf } \mathcal{U}\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big) \tag{9.13}$$

$$L'_{\boldsymbol{u}}\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t),\boldsymbol{\mu}(t),\boldsymbol{\nu}(t)\big) = \boldsymbol{0}, \tag{9.14}$$

$$\boldsymbol{\mu}(t)\geq\boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{h}\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)\geq\boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\mu}(t)\cdot\boldsymbol{h}\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big) = 0 \tag{9.15}$$

$$\boldsymbol{\nu}(t)\geq\boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{k}\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)\geq\boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\nu}(t)\cdot\boldsymbol{k}\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big) = 0 \tag{9.16}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -L'_{\boldsymbol{x}}\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t),\boldsymbol{\mu}(t)\big). \tag{9.17}$$

(*H und L bezeichnen dabei die Hamilton- bzw. Lagrange-Funktion aus* (9.11) *und* (9.12)).
Außerdem gelten die üblichen ***Transversalitätsbedingungen****:*

Kapitel 10

Dynamische Programmierung I (deterministische Probleme)

10.1 Bellman-Gleichung für zeitdiskrete determinist. Probleme

Problemstellung:

$$\max_{\boldsymbol{u}_t \in \mathcal{U}_t,\ t=0,\dots,T} \sum_{t=0}^{T} f_t(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{u}_t) \quad \text{unt. d. NB} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x}_0 \text{ gegeben,} \\ \boldsymbol{x}_{t+1} \;=\; \boldsymbol{g}_t(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{u}_t) \;\; \text{für} \;\; t = 0, \dots, T-1 \end{cases} \tag{1}$$

Zulässige Lösungen: Gesucht sind Fktnen $\boldsymbol{u}_t^*(\boldsymbol{x})$, so dass man mit der Rekursion $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_t^*(\boldsymbol{x}_t)$, $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{g}_t(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{u}_t)$ das Problem (1) für jeden Anfangswert $\boldsymbol{x}_0$ löst (**Markov-Politiken** als Lösungskonzept)
Optimalwertfunktionen: Zur Ermittlung der optimalen Politiken, d.h. der Funktionen $\boldsymbol{u}_t^*(\boldsymbol{x})$, betrachtet die dynamische Programmierung den Optimalwert des Restproblems, das sich vom Zeitpunkt t an noch stellt, als Funktion von dessen Initialzustand $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_t$:

$$V_t(\boldsymbol{x}) := \max_{\boldsymbol{u}_s \in \mathcal{U}_s,\ s=t,\dots,T} \sum_{s=t}^{T} f_s\big(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{u}_s\big) \;\; \text{unt. d. NB} \;\; \begin{cases} \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x} \text{ und für } s = t, \dots, T-1 : \\ \boldsymbol{x}_{s+1} \;=\; \boldsymbol{g}_s\big(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{u}_s\big) \end{cases} \tag{2}$$

Satz 10.1 (Bellman-Gleichung als notwend. und hinreich. Bed. für Optimalität)
a) *Sofern die Optimalwertfunktionen* $V_t(\boldsymbol{x})$ *aus* (2) *existieren (d.h.* $V_t(\boldsymbol{x}) < \infty \ \forall\, t, \boldsymbol{x}$*), erfüllt jede Markov-Politik-Lösng* $\boldsymbol{u}_t^*(\boldsymbol{x})$ $(t = 0, \dots, T)$ *des Optimierungsproblems* (1) *die Bedingungen*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_T^*(\boldsymbol{x}) \;&=\; \arg \max_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_T(\boldsymbol{x})} f_T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u}_t^*(\boldsymbol{x}) \;&=\; \arg \max_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_t(\boldsymbol{x})} \big\{ f_t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + V_{t+1}\big(\boldsymbol{g}_t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\big)\big]\big\}, \;\; t = T\text{-}1,\; T\text{-}2, \dots, 0 \end{aligned} \tag{ARG}$$

und die Optimalwertfunktionen $V_t(\boldsymbol{x})$ *erfüllen die Bellman-Gleichung*

$$\begin{aligned} V_T(\boldsymbol{x}) \;&=\; \max_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_T(\boldsymbol{x})} f_T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \\ V_t(\boldsymbol{x}) \;&=\; \max_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_t(\boldsymbol{x})} \big\{ f_t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + V_{t+1}\big(\boldsymbol{g}_t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\big)\big\}, \quad t = T\text{-}1,\; T\text{-}2, \dots, 0 \end{aligned} \tag{BGL}$$

b) *Wenn Funktionen* $V_t(\boldsymbol{x})$ $(< \infty \ \forall\, t, \boldsymbol{x})$ *existieren, die die Bellman-Gleichungen* (BGL) *erfüllen, und durch* (ARG) *eine Markov-Politik definiert wird, dann ist diese Politik eine Lösung des Optimierungsproblems* (1).

Die Bellman-Gl. (BGL) reduziert das dynamische Optimierungsproblem auf eine **Sequenz statischer Optimierungsprobleme**, die in zeitlich negativer Richung zu durchlaufen ist.

2. Bellman-Gleichung im ‘current value’:
Problemstellung: Laufender Momementanertrag $\check{f}_t(x,u)$ geht diskontiert ein, Diskontrate ϱ:

$$\max_{u_t\in\mathcal{U}_t,\ t=0,1,\dots,T} \Big\{ \sum_{t=0}^{T-1} \big(\tfrac{1}{1+\varrho}\big)^t \, \check{f}_t(x_t,u_t) \ + \ \big(\tfrac{1}{1+\varrho}\big)^T \, \check{f}_T(x_T,u_T) \Big\}, \quad x_0 \text{ gegeben}, \quad x_{t+1} \ = \ g_t(x_t,u_t)$$

Betrachte anstatt der ‘present values’ $V_t(x)$ die ’current values’ $\check{V}_t(x) := (1+\varrho)^t \, V_t(x)$

Bellman-Gleichung im ‘current value’ (zeitdiskret - deterministisch):

$$\check{V}_t(x) \ = \ \max_{u\in\mathcal{U}_t} \big\{ \check{f}_t(x,u) + \tfrac{1}{1+\varrho} \, \check{V}_{t+1}\big(g_t(x,u)\big) \big\} \tag{BĞL}$$

3. Zeitunabhängige Bellman-Gleichung
Problemstellung: Diskontiert-*autonom* mit unendlichem Zeithorizont:

$$\max_{u_t\in\mathcal{U},\ t=0,1,\dots} \Big\{ \sum_{t=0}^{\infty} \big(\tfrac{1}{1+\varrho}\big)^t \, F(x_t,u_t) \Big\}, \quad x_0 \text{ gegeben}, \quad x_{t+1} \ = \ G(x_t,u_t)$$

(D.h. laufender Mom.ertrag $\check{f}_t = F$, Dynamik $g_t = G$ u. Kontrollber. $\mathcal{U}_t = \mathcal{U}$ hängen nicht von t ab.)
Setze Bellman-Gleichung mit zeitunabhängigem $\check{V}(x) = \check{V}_t(x) \ \forall\, t$ an:

Zeit-unabhängige Bellman-Gleichung (*des diskontiert-autonomen Problems mit unendlichem Zeithorizont im zeitdiskreten, deterministischen Szenario*):

$$\check{V}(x) \ = \ \max_{u\in\mathcal{U}} \big\{ F(x,u) + \tfrac{1}{1+\varrho} \check{V}\big(G(x,u)\big) \big\} \tag{BĞL$_s$}$$

10.2 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (zeitstetige determinist. Probleme)

1. Formulierung im Gegenwartswert (present value)
Problemstellung: *zeitstetige* deterministische Probleme (wie in der Kontrolltheorie):

$$\max_{\boldsymbol{u}(t)\in\mathcal{U}(t),\ t\in[0,T]} \int_0^T f\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big)\, dt + S\big(T,\boldsymbol{x}(T)\big) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x}_0 \text{ gegeben}, \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t) \ = \ \boldsymbol{g}\big(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\big) \ (t\in[0,T]) \end{cases} \tag{1}$$

Optimalwertfunktionen:

$$V(t,\boldsymbol{x}) := \max_{\boldsymbol{u}(s)\in\mathcal{U}(s),\ s\in[t,T]} \int_t^T f\big(s,\boldsymbol{x}(s),\boldsymbol{u}(s)\big)\, ds + S\big(T,\boldsymbol{x}(T)\big), \ \begin{cases} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x} \text{ und für } s\in[t,T] \\ \dot{\boldsymbol{x}}(s) = \boldsymbol{g}\big(s,\boldsymbol{x}(s),\boldsymbol{u}(s)\big) \end{cases}$$

Satz 10.2 (Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung als notwend. und hinreich. Bed.)
a) *Wenn die Optimalwertfunktionen aus* (2) *alle existieren* (*d.h.* $V(t,\boldsymbol{x}) < \infty \ \forall\, t,\boldsymbol{x}$) *und stetig diff.bar sind, dann erfüllt eine Lösung* $\mathbf{u}^*(t,\boldsymbol{x})$ *des Problems* (1) *die Bedingung*

$$\boldsymbol{u}^*(t,\boldsymbol{x}) = \arg\max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}(t)} \big\{ f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \tfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{g}\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\big) \big\}, \quad t\in[0,T] \tag{ARG}$$

und die Optimalwertfunktionen erfüllen die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

$$-\tfrac{\partial V}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) \ = \ \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}(t)} \big\{ f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \tfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \big\}, \quad t\in[0,T] \tag{HJB}$$

sowie die Endbedingung

$$V(T,\boldsymbol{x}) \ = \ S(T,\boldsymbol{x}) \tag{END}$$

b) *Wenn eine stetig diff.bare Funktion* $V(t,\boldsymbol{x})$ ($< \infty \ \forall\, t,\boldsymbol{x}$) *existiert, die die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung* (HJB) *unter der Endbed.* (END) *erfüllt, und durch* (ARG) *eine zulässige Kontrolltrajektorie* $\mathbf{u}^*(t)$ *definiert wird, dann ist diese Kontrolltrajektorie eine Lösung von* (1).

Anmerkungen zur HJB-Gleichung:

- $\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}$ steht für den Gradienten $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V$ der Optimalwertfunktion bzgl. $\boldsymbol{x}$
- $\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\lambda}$ (adjungierte Variable des Max.Prinzips, wird hier als Fkt. des Zustands $\boldsymbol{x}$ gesehen)
- Mit der Hamilton-Funktion $H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) := f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ lassen sich die Größen $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ auch als $H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}})$ schreiben; die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung nimmt damit folgende (an das Max.Prinzip erinnernde) Form an:

  $$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) \;=\; \max_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}(t)} H\big(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x})\big)$$

  In Worten: Der (über die Kontrollvariable maximierte) Wert der Hamilton-Funktion gibt den ceteris-paribus Effekt eines Vorverlegens der initialen Zeit um eine Zeiteinheit wieder.

- Nach der Maximierung über $\boldsymbol{u}$ ist die HJB-Gleichung eine **partielle Differentialgleichung erster Ordnung** (eine Gleichung für eine Funktion mehrerer Variablen, die partielle Ableitungen, hier maximal erster Ordnung, der Funktion in Bezug zueinander setzt).

  Für solche Differentialgleichungen ist eine „Endbedingung“ wie $V(T, \boldsymbol{x}) = S(T, \boldsymbol{x})$ in der Regel ausreichend, um ihre Lösung eindeutig festzulegen: Die HJB-Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der Funktionen $V(t, \cdot)$ ausgehend von $V(T, \cdot) = S(T, \cdot)$.

  Die HJB-Gleichung ist also analog zur zeitdiskreten Bellman-Gleichung zu sehen, die auch ausgehend vom Endwert $V_T(\boldsymbol{x}) = f_T(\boldsymbol{x})$ die Rekursion der Funktionen $V_t(\boldsymbol{x})$ in zeitlich absteigender Richtung $t = T-1, T-2, \ldots$ beschreibt.

2. HJB-Gleichung im ‘current value’

Problemstellung: Laufender Momentanertrag $\check{f}(t, x, u)$ geht diskontiert ein, Diskontrate ϱ:

$$\max_{u(t) \in \mathcal{U}_t,\ 0 \le t \le T} \Big\{ \int_0^T e^{-\varrho t}\, \check{f}\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt \;+\; e^{-\varrho T} S\big(x(T), u(T)\big) \Big\}, \quad \dot{x}(t) \;=\; g\big(t, x(t), u(t)\big)$$

Betrachte anstatt der ‘present values’ $V(t, x)$ die ’current values’ $\check{V}(t, x) := e^{-\varrho\, t}\, V(t, x)$

HJB-Gleichung in laufender Bewertung (zeitstetig - deterministisch):

$$\varrho\, \check{V}(t, x) - \frac{\partial \check{V}}{\partial t}(t, x) \;=\; \max_{u \in \mathcal{U}(t)} \big\{ \check{f}(t, x, u) + \frac{\partial \check{V}}{\partial x}(t, x) \cdot g(t, x, u) \big\} \qquad (\mathrm{H\check{J}B})$$

3. Zeitunabhängige HJB-Gleichung

Problemstellung: Diskontiert-*autonom* mit unendlichem Zeithorizont:

$$\max_{u(t) \in \mathcal{U},\ t \ge 0} \Big\{ \int_0^\infty e^{-\varrho t}\, F\big(x(t), u(t)\big)\, dt \Big\}, \quad \dot{x}(t) \;=\; G\big(x(t), u(t)\big)$$

(D.h. laufender Mom.ertrag $\check{f} = F$, Dynamik $g = G$ u. Kontrollber. $\mathcal{U}_t = \mathcal{U}$ hängen nicht von t ab.)
Setze HJB-Gleichung mit zeitunabhängigem $\check{V}(x) = \check{V}(t, x)\ \forall\, t$ an:

Zeit-unabhängige HJB-Gleichung (*des diskontiert-autonomen Problems mit unendlichem Zeithorizont im zeitstetigen, deterministischen Szenario*):

$$\varrho\, \check{V}(x) \;=\; \max_{u \in \mathcal{U}} \big\{ F(x, u) + \check{V}'(x) \cdot G(x, u) \big\} \qquad (\mathrm{H\check{J}B}_s)$$

Kapitel 11

Dynamische Programmierung II (stochastische Probleme)

11.1 Bellman-Gleichung für zeitdiskrete stochastische Probleme

Problemstellung: Das zu lösende stochastische Optimierungsproblem lautet:

$$\max_{\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{x})\in\mathcal{U}_t(\boldsymbol{x}),\ t=0,\ldots,T} \mathrm{E}\Big[\sum_{t=0}^{T} f_t\big(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{X}_t)\big)\Big] \quad \begin{matrix}\text{u.d.}\\ \text{NB}\end{matrix} \quad \begin{cases} \boldsymbol{X}_0 \;=\; \boldsymbol{x}_0, \text{ und für } t=0,\ldots,T-1: \\ \boldsymbol{X}_{t+1} \;=\; \boldsymbol{g}_t\big(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{X}_t); \boldsymbol{Z}_t\big) \end{cases} \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{Z}_t$ einen weißen Rauschprozess darstellt.

Zulässige Lösungen: Eine Lösung des Problems muss Funktionen $\boldsymbol{u}_t^*(\boldsymbol{x})$, $t=0,\ldots,T$ benennen, d.h. Vorschriften, wie man bei Beobachtung von $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_t$ zum Zeitpunkt t optimal entscheidet (Markov-Politiken als Lösungskonzept)

Optimalwerfunktionen: Die dynamische Programmierung betrachtet den Optimalwert V_t des „Restproblems", das sich vom Zeitpkt. t an noch stellt, als Fkt. von dessen Initialzustand $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_t$:

$$V_t(\boldsymbol{x}) := \max_{\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x})\in\mathcal{U}_s(\boldsymbol{x}),\ s=t,\ldots,T} \mathrm{E}\Big[\sum_{s=t}^{T} f_s\big(\boldsymbol{X}_s, \boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{X}_s)\big)\Big] \quad \begin{matrix}\text{u.d.}\\ \text{NB}\end{matrix} \quad \begin{cases} \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{x} \text{ u. für } s=t,\ldots,T-1: \\ \boldsymbol{X}_{s+1} \;=\; \boldsymbol{g}_s\big(\boldsymbol{X}_s, \boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{X}_s); \boldsymbol{Z}_s\big) \end{cases} \tag{2}$$

Satz 11.1 (Bellman-Gleichung als notwend. und hinreich. Bed. für Optimalität)

a) *Sofern die Optimalwertfunktionen* $V_t(\boldsymbol{x})$ *aus* (2) *existieren* (*d.h.* $V_t(\boldsymbol{x}) < \infty\ \forall\, t, \boldsymbol{x}$), *erfüllt jede Markov-Politik-Lösung* $\boldsymbol{u}_t^*(\boldsymbol{x})$ ($t=0,\ldots,T$) *des Optimierungsproblems* (1) *die Beding.en:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_T^*(\boldsymbol{x}) &\in \arg\max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_T(\boldsymbol{x})} f_T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u}_t^*(\boldsymbol{x}) &\in \arg\max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_t(\boldsymbol{x})} \big\{f_t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \mathrm{E}\big[V_{t+1}\big(\boldsymbol{g}_t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\boldsymbol{Z}_t)\big)\big]\big\}, \quad t=T-1, T-2, \ldots \end{aligned} \tag{ARG}$$

und die Optimalwertfunktionen $V_t(\boldsymbol{x})$ *erfüllen die Bellman-Gleichung*

$$\begin{aligned} V_T(\boldsymbol{x}) &= \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_T(\boldsymbol{x})} f_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) \\ V_t(\boldsymbol{x}) &= \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_t(\boldsymbol{x})} \big\{f_t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \mathrm{E}\big[V_{t+1}\big(\boldsymbol{g}_t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\boldsymbol{Z}_t)\big)\big]\big\}, \quad t=T-1, T-2, \ldots \end{aligned} \tag{BGL}$$

b) *Wenn Funktionen* $V_t(\boldsymbol{x})$ ($< \infty\ \forall\, t, \boldsymbol{x}$) *existieren, die die Bellman-Gleichungen* (BGL) *erfüllen, und durch* (ARG) *eine Markov-Politik definiert wird, dann ist diese Politik eine Lösung des Optimierungsproblems* (1)

Suggestivere Schreibweise der Bellman-Gleichung:

$$V_t(\boldsymbol{x}) \;=\; \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_t(\boldsymbol{x})} \big\{f_t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \mathrm{E}\big[V_{t+1}(\boldsymbol{X}_{t+1}) \,\big|\, \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}\big]\big\}$$

2. Bellman-Gleichung im 'current value':

Problemstellung: Laufender Momementanertrag $\check{f}_t(x,u)$ geht diskontiert ein, Diskontrate ϱ:

$$\max_{\boldsymbol{u}_t \in \mathcal{U}_t(\boldsymbol{X}_t),\ t=0,\dots,T} \mathrm{E}\Big[\sum\nolimits_{t=0}^{T} \big(\tfrac{1}{1+\varrho}\big)^t\, \check{f}_t\big(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{u}_t\big)\Big] \quad \text{u.d.NB} \quad \begin{cases} \boldsymbol{X}_0 \ = \ \boldsymbol{x}_0, \ \text{und für } t = 0, \dots, T-1: \\ \boldsymbol{X}_{t+1} \ = \ \boldsymbol{g}_t\big(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{u}_t; \boldsymbol{Z}_t\big) \end{cases}$$

Betrachte anstatt der 'present values' $V_t(x)$ die 'current values' $\check{V}_t(x) := (1+\varrho)^t\, V_t(x)$

Bellman-Gleichung in laufender Bewertung (zeitdiskret - stochastisch):

$$\check{V}_t(x) \ = \ \max_{u \in \mathcal{U}} \big\{ \check{f}_t(x,u) + \tfrac{1}{1+\varrho}\, \mathrm{E}\big[\check{V}_{t+1}\big(g_t(x,u;Z_t)\big)\big] \big\} \qquad (\mathrm{B\check{G}L})$$

3. Zeitunabhängige Bellman-Gleichung

Problemstellung: Diskontiert-*autonom* mit unendlichem Zeithorizont:

$$\max_{u_t \in \mathcal{U},\ t=0,1,\dots} \Big\{ \mathrm{E}\Big[\sum\nolimits_{t=0}^{\infty} \big(\tfrac{1}{1+\varrho}\big)^t\, F(x_t, u_t)\Big]\Big\}, \quad X_0 = x_0, \quad X_{t+1} \ = \ G(X_t, u_t(X_t); Z_t)$$

(D.h. laufender Mom.ertrag $\check{f}_t = F$, Dynamik $g_t = G$ u. Kontrollber. $\mathcal{U}_t = \mathcal{U}$ hängen nicht von t ab.)

Setze Bellman-Gleichung mit zeitunabhängigem $\check{V}(x) = \check{V}_t(x)\ \forall\, t$ an:

Zeit-unabhängige Bellman-Gleichung (*des diskontiert-autonomen Problems mit unendlichem Zeithorizont im zeitdiskreten, stochastischen Szenario*):

$$\check{V}(x) \ = \ \max_{u \in \mathcal{U}} \big\{ F(x,u) + \tfrac{1}{1+\varrho} \mathrm{E}\big[\check{V}\big(G(x,u,Z)\big)\big] \big\} \qquad (\mathrm{B\check{G}L}_s)$$

11.2 Stochastische Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Problemstellung: Die Zustandsdynamik sei durch eine stochast. Diff.Gl. beschrieben:

$$dX_t = \mu(t, X_t, u_t)\, dt + \sigma(t, X_t, u_t)\, dW_t \quad (W_t = \text{Wiener-Prozess}) \qquad (1)$$

so dass sich Drift μ und/oder Volatilität σ von X_t durch u_t beeinflussen lassen. Ziel ist:

$$\max_{u(t,x) \in \mathcal{U}_t(x)} \mathrm{E}\Big[\int_0^T f\big(t, X_t, u_t\big)\, dt + S\big(T, X_T\big)\Big] \quad \text{u.d.NB.:} \quad X_0 = x_0, \quad dX_t \text{ gemäß (1)} \qquad (2)$$

Optimalwertfunktionen:

$$V(t,x) := \max_{u(s,x) \in \mathcal{U}_s(x), s \in [t,T]} \mathrm{E}\Big[\int_t^T f\big(s, X_s, u(s, X_s)\big)\, ds + S\big(T, x(T)\big)\Big], \quad \begin{matrix} X_t = x, \ \text{für } s > t: \\ dX_s \text{ gem. (1)} \end{matrix} \qquad (3)$$

Satz 11.2 (Stochast. Hamilton-Jacobi-Bellman-Gl. als notwend. u. hinr. Bed.)

a) *Wenn die Optimalwertfunktionen aus* (3) *alle existieren* (*d.h.* $V(t,x) < \infty\ \forall\, t, x$) *und 2-mal stetig diff.bar sind, dann erfüllt eine Lösung* $u^*(t,x)$ *des Problems* (1), (2) *die Bedingung*

$$u^*(t,x) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}(t)} \big\{ f(t,x,u) + \mu\big(t,x,u\big)\, \tfrac{\partial V}{\partial x}(t,x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,x,u)\, \tfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) \big\}, \qquad (\mathrm{ARG})$$

und die Optimalwertfunktionen erfüllen die stochastische Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

$$-\tfrac{\partial V}{\partial t}(t,x) \ = \ \max_{u \in \mathcal{U}(t)} \big\{ f(t,x,u) + \mu(t,x,u)\, \tfrac{\partial V}{\partial x}(t,x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,x,u)\, \tfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) \big\}, \qquad (\mathrm{HJB})$$

(*jeweils für alle* $t \in [0.T]$) *sowie die Endbedingung*

$$V(T,x) \ = \ S(T,x) \qquad (\mathrm{END})$$

Teil b) von Satz 11.2 [Stochast. Hamilton-Jacobi-Bellman-Gl. als hinreich. Bed.]
b) Wenn eine zweimal stetig diff.bare Funktion $V(t,x)$ ($<\infty\ \forall\, t,x$) 'mit dem richtigen Randverhalten bzgl. x' existiert, die Gl. (HJB) unter der Endbed. (END) erfüllt, und durch (ARG) eine Markov-Politik $u^*(t,x)$ definiert wird, dann ist diese Markov-Politik eine Lösung von (1).
(Muss hier nicht vorausgesetzt werden, dass das Problem überhaupt eine Markov-Politik-Lösung hat?)

Anmerkungen zur stochastischen HJB-Gleichung:

- Die Voraussetzungen in b) sind bewusst schwammig formuliert. Genaue Angaben der Voraussetzungen in *Oeksendal, Stochastic Differential Equations*: Theorem 11.2.1 („HJB-equation I“, notwendige Bed.) und Theorem 11.2.2. („HJB-equation II“, hinreich. Bed.).
- Wie die deterministische HJB-Gleichung ist auch die stochastische HJB-Gleichung eine partielle Differentialgleichung, allerdings zweiter Ordnung in x. Für eine eindeutige Lösung werden i.d.R. räumliche Randbedingungen (Randbedingungen bzgl. x benötigt). Man hat dann ein sog. Anfangs-Randwertproblem. Die berühmteste dieser Gleichungen ist die Black-Scholes-Differentialgleichung.

2. Stochastische HJB-Gleichung im 'current value' Wie schon mehrfach vorher: Wenn ein tatsächlicher Momentanertrag $\check f(t,x,u)$ diskontiert eingeht, d.h. $f(t,x,u) = e^{-\varrho t}\,\check f(t,x,u)$, dann gelangt man durch $\check V(t,x) = e^{\varrho t} V(t,x)$ zu den mit t mitlaufenden Werten. Bezüglich der $\check V$ schreibt sich die HJB-Gl. als

HJB-Gleichung in laufender Bewertung (zeitstetig - stochastisch):

$$\varrho\,\check V(t,x) - \tfrac{\partial \check V}{\partial t}(t,x) \;=\; \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}(t)} \left\{ \check f(t,x,u) + \mu(t,x,u)\,\tfrac{\partial \check V}{\partial x}(t,x) + \tfrac12 \sigma^2(t,x,u)\,\tfrac{\partial^2 \check V}{\partial x^2}(t,x) \right\} \quad (\mathrm{H\check{J}B})$$

3. Zeitunabhängige stochastische HJB-Gleichung Wenn das Problem diskontiert-autonom ist, d.h. außer dem Diskontfaktor in f besteht keine explizite Zeitabhängigkeit: $f(t,x,u) = e^{-\varrho t}\,F(x,u)$, $\mu(t,x,u) = \mu(x,u)$, $\sigma(t,x,u) = \sigma(x,u)$ und $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}$, wird die HJB-Gleichung des letzten Abschnitts autonom:

$$\varrho\,\tfrac{\partial \check V}{\partial t}(t,x) - \tfrac{\partial \check V}{\partial t}(t,x) \;=\; \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}} \left\{ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\,\tfrac{\partial \check V}{\partial \boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}) + \tfrac12 \sigma^2(x,u)\,\tfrac{\partial^2 \check V}{\partial x^2}(t,x) \right\},$$

Wenn nun $T=\infty$ ist, macht es Sinn, nach einer Lösung $\check V(t,x) = \check V(x)$ zu suchen. Das führt auf die zeitunabhängige (man könnte auch sagen: 'autonome' oder 'stationäre') HJB-Gleichung:

Zeit-unabhängige HJB-Gleichung (*des diskontiert-autonomen Problems mit unendlichem Zeithorizont im zeitstetigen, stochastischen Szenario*):

$$\varrho\,\check V(x) \;=\; \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}} \left\{ F(x,u) + \mu(x,u)\,\check V'(x) + \tfrac12 \sigma^2(x,u)\,\check V''(x) \right\}, \qquad (\mathrm{H\check{J}B}_s)$$

11.3 Anhang: Stochastische Differentialgleichungen; Itô-Formel

Itô-Formel: Gegeben ein Prozess X_t, der der stochast. Diff.gl.

$$dX_t = \mu(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t$$

folgt, sowie eine (zweimal stetig diff.bare) Funktion $V(t,x)$. Dann kann man aus X_t einen neuen Prozess $V_t := V(t,X_t)$ bilden. Das Itô-Lemma besagt, dass dann auch V_t einem Itô-Prozess folgt, und zwar gilt nach der **Itô-Formel**

$$\boxed{dV_t \;=\; \left[\tfrac{\partial V}{\partial t} + \mu(t,X_t)\,\tfrac{\partial V}{\partial x} \;+\; \tfrac12 \sigma^2(t,X_t)\,\tfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right] dt + \left[\sigma(t,X_t)\,\tfrac{\partial V}{\partial x}\right] dW_t}$$

D.h. Drift μ_V und Volatilität σ_V von V ergeben sich aus Drift μ_X und Volatilität σ_X von X als:

$$\mu_V = \tfrac{\partial V}{\partial t} + \mu_X\,\tfrac{\partial V}{\partial x} + \tfrac12 \sigma_X^2\,\tfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \sigma_V = \sigma_X\,\tfrac{\partial V}{\partial x}$$