DIE P-ADISCHEN ZAHLEN

JÖRN STEUDING

"Die vielseitige Anwendbarkeit der Potenzreihendarstllungen in der komplexen Funktionentheorie war es, die Hensel den Gedanken gab, ein entsprechendes wirksames Handwerkszeug auch für die Zahlentheorie zu schaffen, und ihn so auf die p-adischen Zahlen führte." (Helmut Hasse, [52], S. 143)

1. Hensels Grundsteinlegung

Die Motivation für die p-adischen Zahlen liegt in den Analogien zwischen ganzen Zahlen und Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten. Ähnlich der Primfaktorzerlegung ganzer Zahlen lassen sich solche Polynome multiplikativ in nicht weiter zerlegbare (irreduzible) Polynome zerlegen. Beobachtungen dieser Art lieferten im 19. Jahrhundert weitreichende Konzepte zur Behandlung zahlentheoretischer Problemstellungen; hierbei ist in erster Linie die Berliner Schule um Ernst Eduard Kummer (1810-1893), Karl Weierstraß (1815-1897) und Leopold Kronecker (1823-1891) zu nennen. Bereits 1857, also in dem Jahr bevor Weierstraß nach Berlin kam, forderte er Kronecker angesichts dessen Ausführungen zur algebraischen Zahlentheorie auf, "dieselben Principien auf algebraische Functionen einer Variablen anzuwenden" (Kronecker [74], S. 303; siehe ebenso Ullrich [137], S. 165). Kronecker folgte diesem weitblickenden Ratschlag Weierstraß' und entwickelte eine solche Theorie der algebraischen Funktionen. Tatsächlich hatte diese wiederum einen Effekt auf rein zahlentheoretische Fragestellungen; das Verbindungsglied hierbei sind, wie wir im Folgenden illustrieren wollen, die p-adischen Zahlen.

Einem Polynom

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$$

sieht man sein Werteverhalten an seinen Koeffizienten an; beispielsweise haben reelle kubische Polynome bei $X \to +\infty$ bzw. $-\infty$ ein unterschiedliches Vorzeichen und nehmen daher jeden reellen Wert an. In der komplexen Analysis werden Funktionen einer komplexen Veränderlichen untersucht und entsprechend betrachtet man dort Potenzreihenentwicklungen

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(X - x_0)^m = a_0 + a_1(X - x_0) + \ldots + a_m(X - x_0)^m + \ldots$$

mit komplexen Koeffizienten a_m um einen Entwicklungspunkt x_0 in der komplexen Ebene, welche jeweils eine komplex differenzierbare (so genannte *holomorphe*)[1] Funktion

Date: 1. Dezember 2014.

[1] *Komplexe Differenzierbarkeit* wird analog zur reellen Differenzierbarkeit durch Existenz des Grenzwertes $\frac{1}{h}(f(X+h) - f(X))$ bei $h \to 0$ erklärt; allerdings kann in der komplexen Ebene h nicht nur aus zwei Richtungen gegen null streben, womit die komplexe Differenzierbarkeit wesentlich restriktiver als reelle Differenzierbarkeit ist. *Holomorph* entstammt den griechischen Wörtern *holos* für 'ganz' und *morphe* für 'Form'.

f definieren, und umgekehrt ist eine jede solche lokal (also um x_0) in eine Potenzreihe entwickelbar; sind jene Reihendarstellungen einer Funktion f um hinreichend viele Entwicklungspunkte bekannt, ist das wesentliche Werteverhalten durch diese lokalen Informationen festgelegt. Dies ist genau die Philosophie hinter dem von Karl Weierstraß (seit ca. 1841[2]) propagierten Zugang zur Funktionentheorie. Für eine (so genannte *meromorphe*) Funktion f mit einer in x_0 behafteten Polstelle ergibt sich darüber hinaus eine Darstellung als so genannte Laurent-Reihe der Form

$$f(X) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m (X - x_0)^m \qquad \text{mit} \quad a_m \in \mathbb{C},$$

und der ganzen Zahl m_0 liest man im Falle von $a_{m_0} \neq 0$ die Ordnung der Polstelle ab; ist beispielsweise $m_0 = -1$, so gilt

$$f(X) = \frac{a_{-1}}{X - x_0} + a_0 + a_1(X - x_0) + \dots ,$$

und f besitzt einen einfachen Pol in x_0 (mit *Residuum* a_{-1}).

Vor dem Hintergrund dieser Darstellungen schrieb Kurt Hensel:

> "Der Grund, warum die allgemeine Untersuchung der Zahlgrößen so außerordentlich viel schwieriger ist als die der Funktionen, scheint mir nun ausschließlich der zu sein, daß wir für die Zahlen im wesentlichen nur eine einzige Darstellung kennen, während wir für jede Funktion unendlich viele Funktionenelemente finden können. Für die Zahlen haben wir nämlich allein die Darstellung ihrer Größe nach, z.B. in Form eines Dezimalbruches mit reellen oder komplexen Koeffizienten. [...] Wenn man für die Zahlen dieselbe Mannigfaltigkeit erreichen kann, wie sie die Lehre von den Funktionen auszeichnet, so wird man auf dem Wege sein, die Zahlentheorie zu derselben methodischen Vollkommenheit und leichten Anwendbarkeit zu führen, welche die Funktionentheorie seit den grundlegenden Untersuchungen von Cauchy, Riemann und Weierstraß besitzt."[3]

Kurt Hensel wurde 1861 in Königsberg (dem heutigen russischen Kaliningrad) und verstarb 1941 in Marburg, wo er seit 1901 eine Professur innehatte; ebenfalls ab 1901 war Hensel Herausgeber des renommierten Crelle Journals[4]. Seine Großmutter war die Pianistin Fanny Mendelssohn, Schwester des noch berühmteren Komponisten Felix Mendelssohn Bartholdy[5], womit Hensel auch ein später Verwandter von Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) ist, welcher die andere Schwester Rebecca heiratete; weitere über diesen Zweig verwandte Mathematiker sind Ernst Eduard Kummer, Hermann Amandus Schmidt, Walter Hayman und Helmut Hasse (cf. Shields [126], S. 9, bzw. Hayman [55], S. xi), wobei Erst- und Letztgenannter später noch im Zusammenhang mit den p-adischen Zahlen in Erscheinung treten werden. Neben seinen wertvollen Beiträgen zur Zahlentheorie (wie etwa die p-adischen Zahlen) war Hensel auch als Meister von

---

[2]Eine ausführliche Behandlung der Weierstraßschen Funktionentheorie und Diskussion ihrer Abgrenzung von Bernhard Riemanns geometrischem Ansatz findet sich bei Bottazzini & Gray [13].

[3][60], S. 3; der Begriff 'Funktionenelement' im Zitat steht für die lokale Darstellung einer Funktion.

[4]eines der ältesten Mathematik-Journale überhaupt, eigentlich *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1826 gegründet und zunächst herausgegeben von August Leopold Crelle

[5]Die Kinder wurden christlich erzogen und protestantisch getauft; hierbei wurde der 'christliche' Name Bartholdy dem eigentlichen Nachnamen hinzugefügt.

Schüttelreimen wie "In diesem kleinen Gartenhaus / Bezwing' ich selbst den harten Gauß" bekannt.

Hensel war Schüler von Leopold Kronecker und Karl Weierstraß. "Allwöchentlich stattete er [in seiner Berliner Zeit], wie jeder jüngere Berliner Dozent der Mathematik, dem damals hochbetagten Weierstraß seinen Besuch ab. Ihm verdankte er neben Kronecker wohl die hauptsächliche Anregung für die Konzeption des Grundgedankens seiner zahlentheoretischen Neuschöpfung." (Hasse [50], S. 3). Hensel selbst sah sich nicht nur als Doktorand Kroneckers – mit seiner Dissertation 1884 trat er in Kroneckers Fußstapfen und sollte auch Zeit seines Lebens dessen Ideen und Methoden verbunden bleiben –, sondern gar als "Hauptschüler des großen Berliner Mathematikers Kronecker" (cf. [137], S. 168).[6]

ABBILDUNG 1. Von links nach rechts zwei Wegbereiter und der Pionier der p-adischen Zahlen: die Berliner Mathematiker Karl Weierstraß und Leopold Kronecker sowie der Marburger Kurt Hensel.

Entsprechend machte sich Hensel auf und studierte spätestens ab 1893[7] zu einer fest gewählten Primzahl p Ausdrücke der Form

$$\alpha = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m p^m \qquad \text{mit} \quad a_m \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, \tag{1}$$

wobei m_0 eine beliebige ganze Zahl ist und nennt diese p-adische Zahlen. Mit Hilfe der Potenzgesetze und Superposition lassen sich diese unendlichen Reihen in Analogie zur Arithmetik bei Polynomen und Potenzreihen unter Berücksichtigung eines eventuellen Übertrages (formal) addieren und multiplizieren. Beispielsweise gilt so

$$\begin{array}{rl} & 1 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4 + \ldots \\ + & 2 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + \ldots \\ = & 3 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^4 + \ldots, \end{array}$$

wie eine leichte Rechnung zeigt, und was wir als $(14301\ldots)_5 + (23122\ldots)_5 = (32033\ldots)_5$ notieren. Für endliche Summen ähnelt dies der üblichen Dezimalentwicklung natürlicher Zahlen bzw. der im Umgang mit Computern gebräuchlichen Binärdarstellung. Jedoch

[6]Mehr zu Hensels Leben und Werk findet sich in Hasses Nachruf [50] und Birgit Petris Dissertation [108].

[7]cf. Hasse [50], S. 3; Hensels erste Veröffentlichung zu diesem Thema findet sich mit [56] in den damals jungen *Jahresberichten* der 1890 gegründeten *Deutschen Mathematiker Vereinigung* anlässlich der von Richard Dedekind organisierten Jahrestagung 1897 in Braunschweig.

steht bei diesen Ausdrücken (1) kein Stellenwertsystem im Hintergrund, wie etwa das folgende Beispiel zeigt:

$$-1 = p - 1 + (p-1)p + (p-1)p^2 + \ldots = (p-1, p-1, p-1, \ldots)_p \ ;$$

dass hier tatsächlich eine Gleichung steht, offenbart Addition von eins auf beiden Seiten (unter Beachtung des auftretenden Übertrags in der formalen Reihe rechts). Seltsam erscheint bei solchen Ausdrücken allerdings, dass, wie etwa in dem letzten Beispiel, unendlich viele *große* Werte aufsummiert werden ohne einen unendlichen Wert zu liefern (und sogar ein negativer Wert als Summe positiver Terme gewonnen wird).

Hierzu äußerte Hensel:

> "Das einzige Bedenken, das gegen diese Erweiterung des Bürgerrechtes für die Zahlen geltend gemacht werden könnte, ist das, daß eine solche unbegrenzte Reihe, wenn man sie in gewöhnlicher Weise summieren würde, eine unendliche Summe ergäbe. Aber das tritt eben nur dann ein, wenn wir an der gewöhnlichen Definition der Größe festhalten; wir sind jedoch heutigentags weit von dem Standpunkte entfernt, das Maß oder die Größe einer Zahl oder einer geometrischen Figur als etwas von Natur und mit Notwendigkeit Gegebenes anzusehen. Wir betrachten die Größe einer Figur oder einer Zahl vielmehr als eine Funktion ihrer Bestimmungsstücke, deren Festsetzung ganz in unserem Belieben gestellt ist, und bei deren Wahl wir uns durch Gründe der Zweckmäßigkeit leiten lassen."[8]

Zunächst untersuchte Hensel seine p-adischen Reihen nur als formale Objekte; 1904 kam mit seiner Arbeit [57] eine simple, aber wesentlich veränderte analytische Sichtweise zu Tage, in welcher die Frage nach der Größe einer Zahl ("Maßzahl" bei Hensel) in diesem Kontext erörtert wurde — mit Hilfe eines veränderten Begriffes der Konvergenz schaffte Hensel Vorbehalte aus der Welt. Hierzu betrachten wir (ähnlich zu Hensels Vorgehen, bloss benutzen wir moderne Sprache) die eindeutige Primfaktorzerlegung rationaler Zahlen. Fixieren wir eine Primzahl p, so besitzt jede rationale Zahl $x \neq 0$ insbesondere eine eindeutige Darstellung

$$x = \frac{a}{b} \cdot p^{\nu_p(x)} \qquad \text{mit teilerfremden } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \text{ und } ab \not\equiv 0 \bmod p,$$

wobei $\nu_p(x)$ der ganzzahlige Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von x sei. Dann ist der *p-adische Absolutbetrag* erklärt durch

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-\nu_p(x)} & \text{falls} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0; \end{cases}$$

die Abbildung $x \mapsto \nu_p(x)$ heißt *p-adische Bewertung*.[9] Zum Beispiel ist $\nu_3(\frac{2}{21}) = -1$ und also $|\frac{2}{21}|_3 = 3$. Man rechnet leicht nach, dass der p-adische Absolutbetrag ähnliche Eigenschaften besitzt wie der aus der reellen Analysis bekannte Standardabsolutbetrag: So gelten i) die Positivität: $|x| \geq 0$ für beliebige $x \in \mathbb{Q}$ und $|x| = 0$ genau für $x = 0$; ii) die

[8][60], S. 17/18; ebenfalls interessant in diesem Kontext ist Oskar Perrons Münchener Antritts- und Verteigungsrede [106], in der er sie als "glänzende und höchst originelle Leistung" gegenüber dem konservativen Standpunkte Kroneckers verteidigt.

[9]Dies ist Kürscháks Begriff [78] (wie auch in §3 weiter thematisiert wird); Hensels verwandte 'Maßzahl' ist ein wesentlich komplizierterer Ausdruck, der weniger leistet.

Multiplikativität: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, sowie iii) die Dreiecksungleichung: $|x+y| \leq |x|+|y|$ für beliebige $x, y \in \mathbb{Q}$. Tatsächlich erlaubt der p-adische Absolutbetrag im Gegensatz zum herkömmlichen Betrag zusätzlich eine *verschärfte Dreiecksungleichung*

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \qquad \text{für beliebige} \quad x, y.$$

Äquivalent zu dieser Ungleichung gilt nämlich $\nu_p(x+y) \geq \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$. Insbesondere besitzt also eine rationale Zahl x genau dann einen *kleinen* p-adischen Absolutbetrag, wenn sie durch eine *große* Potenz von p teilbar ist; der reelle Betrag von x ist hier bedeutungslos. Insofern misst der p-adische Absolutbetrag eine arithmetische Eigenschaft![10]

Vor diesem Hintergrund berechnen wir eine unendliche Reihe der Form (1). Für die endliche geometrische Reihe gilt bekanntlich

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^M = \sum_{m=0}^{M} p^m = \frac{1 - p^{M+1}}{1-p},$$

und wegen $|p^{M+1}|_p = p^{-M-1}$ konvergiert dieser Ausdruck bei gegen unendlich wachsendem M gegen die unendliche geometrische Reihe

$$1 + p + p^2 + \ \ldots\ = \sum_{m=0}^{\infty} p^m = \frac{1}{1-p};$$

natürlich ist diese Konvergenz p-adischer Natur![11] In ähnlicher Weise zeigt sich, dass jede der Reihen (1) p-adisch konvergiert, allerdings dürfen wir dabei nicht unbedingt rationale Grenzwerte erwarten. In Analogie zur Dezimalentwicklung reeller Zahlen gilt nämlich:

Die Reihe $\sum_{m \geq m_0} a_m p^m$ besitzt p-adisch genau dann einen rationalen Grenzwert, wenn die Ziffernfolge schließlich periodisch ist, also eine natürliche Zahl g existiert mit $a_{n+g} = a_n$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$.

Dies lässt sich ganz ähnlich beweisen wie im Falle der Dezimalentwicklung. Wir dürfen uns dabei auf den Fall $m_0 = 0$ und $a_0 \neq 0$ beschränken. Liegt eine schließlich periodische Ziffernfolge vor, ist sie als unendlicher Vektor geschrieben von der Gestalt $(a_0 a_1 a_2 \ldots)_p = (b_0 b_1 \ldots b_{h-1} \overline{c_0 c_1 \ldots c_{g-1}})_p$ mit gewissen ganzen Zahlen h, g sowie $b_j, c_\ell \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$; wie üblich notieren wir die Periode mit einem Überstrich. Es gilt also $b_m = a_m$ für $0 \leq m < h$ und $c_j = a_{j+kg+h}$ für $0 \leq j < g$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir berechnen

$$b := b_0 + b_1 p + \ldots + b_{h-1} p^{h-1} \qquad \text{und} \qquad c := c_0 + c_1 p + \ldots + c_{g-1} p^{g-1}$$

unter Verwendung der obigen Formel für die p-adisch konvergente unendliche geometrische Reihe und erhalten den rationalen Grenzwert

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m p^m = b + c p^h \left(1 + p^g + p^{2g} + \ldots\right) = b + c \frac{p^h}{1 - p^g}.$$

Zum Nachweis der Umkehrung betrachten wir eine rationale Zahl $\alpha = \frac{d}{f}$ mit teilerfremden Zähler d und Nenner f. Wir nehmen wiederum an, dass $m_0 = 0$ und $a_0 \neq 0$ gelten,

[10]Ähnliches gilt für den durch $\exp(-\deg P)$ definierten Absolutbetrag für Polynome $P \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad $\deg P$ und seine Erweiterung auf rationale Funktionen. Dieser Betrag erweist sich im Studium der Arithmetik von Funktionenkörpern als sehr hilfreich.

[11]Tatsächlich ist die unendliche Reihe $1 + p + p^2 + \ldots$ auch die Lösung der Iteration $x_n := 1 + p x_{n-1}$ mit Startwert $x_0 = 0$, welche die Gleichung $X = 1 + pX$ löst. Dieses kurios anmutende Beispiel ist dem lesenswerten Buch [40] von Gouvêa entnommen, S. 17/18.

womit f also nicht durch p teilbar ist und also nach dem Satz von Euler[12] $p^g \equiv 1 \bmod f$ bzw. $p^g - 1 = fk$ mit einer natürlichen Zahl g und einer ganzen Zahl k gilt. Es folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m p^m = \frac{d}{f} = \frac{dk}{p^g - 1}.$$

Zum Zähler dk existiert nun eine natürliche Zahl h mit entweder $0 \leq dk < p^h$ oder $-p^h \leq dk < 0$ je nach dem Vorzeichen von α. Aufgrund der Teilerfremdheit von p^h und $p^g - 1$ existieren nach dem Bézoutschen Satz[13] ganze Zahlen b und c mit $dk = b\,(p^g - 1) - cp^h$, wobei $0 \leq c < p^g - 1$ oder $0 < c \leq p^g - 1$ gewählt sei, entsprechend dem Vorzeichen von α. Dies führt auf

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m p^m = \frac{dk}{p^g - 1} = \frac{b\,(p^g - 1) - cp^h}{p^g - 1} = b + c\frac{p^h}{1 - p^g}$$

und Entwickeln von b und c in ihre endlichen p-adischen Darstellungen schließt die Argumentation ab.

Für den Fall der Dezimalentwicklung findet man diesen Beweis bereits in Carl Friedrich Gauß' *Disquisitiones Arithmeticae* [38], §312-318. Der konstruktive Beweis liefert mit ein wenig Rechnerei zum Beispiel:

$$\frac{15}{7} = 3 \cdot \frac{5}{7} = 3 \cdot \frac{520}{3^6 - 1} = 3 \cdot \left(209 + 208 \cdot \frac{3^6}{1 - 3^6}\right) = (020212\overline{010212})_3 \ .$$

Hierzu löst man zuerst die Kongruenz $3^g \equiv 1 \bmod 7$ und findet so $g = 6$ und $k = 104$; anschließend ist die lineare Gleichung $520 = 728b - 729c$ (mit dem euklidischen Algorithmus) unter der Nebenbedingung $0 < c < 729$ zu lösen, woraus sich $b = 209$ und $c = 208$ ergeben, welche noch 3-adisch zu entwickeln sind.

Mit dem angepassten Konvergenzbegriff erhält die Menge der unendlichen Reihen der Gestalt (1) Struktur (ähnlich der uns wohlbekannten bei den rationalen bzw. reellen Zahlen), wie bereits Hensel erkannte: Bzgl. der oben erklärten Addition und Multiplikation sind die Assoziativ- und Distributivgesetze gültig; es existieren neutrale und inverse Elemente für diese Verknüpfungen (mit Ausnahme der Null, die kein multiplikativ Inverses besitzt). Damit entsteht ein (in älterer Sprache) 'Rationalitätsbereich' bzw. (in moderner Sprache) der *Körper der p-adischen Zahlen* $\mathbb{Q}_p$.[14] Hensel war sich dieser Struktur bewusst und notierte seine p-adischen Körper mit $K(p)$; auch bewies er in [57] etwa, dass der Polynomring in einer Veränderlichen über den p-adischen Zahlen eine eindeutige Zerlegung in nicht weiter zerlegbare Elemente besitzt. Dies ist insofern bemerkenswert, weil Richard Dedekind (1831-1916) zwar bereits 1871 die Definition eines Körpers gegeben hatte (implizit als Teilmengen von $\mathbb{C}$), aber Dedekind selbst, und etliche Nachfolger ebenso, diesen Begriff lediglich Zahlkörpern (also endliche algebraische Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ wie beispielsweise $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$) und Funktionenkörpern (wie etwa

[12]wonach $a^{\varphi(f)} \equiv 1 \bmod f$ für teilerfremde a, f gilt, wobei $\varphi(f)$ die Anzahl der zu f teilerfremden natürlichen Zahlen $< f$ zählt

[13]der besagt, dass die Gleichung $aX - bY = c$ genau dann in ganzen Zahlen lösbar ist, wenn der größte gemeinsame Teiler d von a und b in c aufgeht; in dem Fall besitzt die Gleichung unendlich viele Lösungen $x_s + bm/d, y_s + am/d$ mit beliebigem ganzzahligen m und einer speziellen Lösung $ax_s - by_s = c$.

[14]Die hiermit unvertraute Leser_in mag sich am Berechnen der (additiven und multiplikativen) Inversen von $5^{-1} + 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2$ in $\mathbb{Q}_5$ versuchen. Eine passende Frage an dieser Stelle ist, inwiefern die Beschränkung auf eine Primzahl p relevant ist?

die Menge der rationalen Funktionen einer Variablen mit rationalen Koeffizienten) zugesprochen hat.[15] Hensels p-adische Körper sind hier die ersten Ausnahmen, wenngleich Hensel selbst dies nicht zum Anlass nahm, eine allgemeine Theorie der Körper zu begründen, sondern dieser weitere Schritt Ernst Steinitz in dessen bahnbrechender Arbeit [133] vorbehalten blieb. Dieser äußerte über seinen Beweggrund für seine umfangreichen Studien in einer Fußnote zu Beginn seiner Abhandlung "Zu diesen allgemeinen Untersuchungen wurde ich besonders durch *Hensels* Theorie der algebraischen Zahlen (Leipzig, 1908) angeregt, in welcher der Körper der p-adischen Zahlen den Ausgangspunkt bildet, ein Körper, der weder den Funktionen- noch den Zahlkörpern im gewöhnlichen Sinne des Wortes beizuzählen ist." ([133], S. 167).[16]

2. Hensel zwischen Kronecker und Dedekind

Die Kroneckerschen Arbeiten gelten als schwer zugänglich; andererseits setzten sie wesentliche Impulse für die Entwicklung der Mathematik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Ein herausstechendes Merkmal sind die konstruktiven Methoden. Diesem von Kronecker geprägten Konstruktivismus gegenüber steht die axiomatische Methode, wie sie prominent von David Hilbert (1862-1943) etwa in seinen *Grundlagen der Geometrie* [64] vertreten wurde[17] in Anlehnung an Dedekinds Begründung der Zahlen *Was sind und was sollen die Zahlen* [26] (insbesondere Konstruktion der reellen Zahlen mit den Dedekindschen Schnitten) und seiner auf der Mengenlehre aufbauenden, nicht-konstruktiven Idealtheorie.

Gemeinsam mit Georg Landsberg (1865-1912), einem Breslauer Anhänger des Kroneckerschen Zugangs zur Zahlentheorie, verfasste Hensel das Buch *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale* [62]. Steinitz schrieb in seinem Bericht [132] für das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik hierzu: "[A]n einem Lehrbuch, welches die verschiedenen Methoden zu einem organischen Ganzen verband und eine im wesentlichen vollständige. Darstellung der Theorie gab, hat es bislang gefehlt. Diesem Mangel wird durch die Vorlesungen von Hensel und Landsberg abgeholfen. Von welchen Gesichtspunkten die Verf. ausgingen, und welches Ziel sie sich gesteckt, haben sie in einem Vor- und Nachwort ausführlich dargelegt, welchen wir hier einige besonders charakteristische Sätze entnehmen: 'Im Laufe der letzten vierzig Jahre hat sich den Forschern, zuerst durch die Arbeiten von Weierstraß, Kronecker, Dedekind und Weber, mehr und mehr die Überzeugung aufgedrängt, daß der leichteste und sicherste Eingang in diese Theorie durch eine wesentlich arithmetische Betrachtung der rationalen und der algebraischen Funktionen gewonnen werden kann, selbstverständlich unter organischer Einführung der hierher gehörigen Resultate aus der Funktionentheorie."' Tatsächlich etablierte sich das

[15] Dedekind schreibt "Unter einem Körper wollen wir jedes System von unendlich vielen reellen oder komplexen Zahlen verstehen, welches in sich so abgeschlossen und vollständig ist, daß die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von je zwei Zahlen immer wieder eine Zahl desselben Systems hervorbringt." [27], S. 223 f; der auftretende Begriff 'vollständig' hat nichts mit dem im folgenden Paragraphen auftetenden gemein.

[16] Steinitz gelingt in dieser Arbeit u.a. der Existenznachweis des algebraischen Abschlusses beliebiger Körper mit Hilfe des Auswahlaxioms; siehe auch Alten et al. [1], S. 566.

[17] Hilberts Sichtweise ist sehr lesenswert in [65] wiedergegeben.

Buch von Hensel und Landsberg als das Standardwerk[18] bis es schließlich von der modernen Algebra von Emmy Noether und Emil Artin abgelöst wurde. Interessanterweise deutet Steinitz [132] Kritik an bestehenden Darstellungen des Themas wie etwa [28] von Dedekind und Weber an:

> "Bei Dedekind und Weber steht die Forderung der Reinheit der Methode im Vordergrunde; jede mit Stetigkeitsvoraussetzungen behaftete Deduktion, insbesondere jede geometrische Veranschaulichung ist geflissentlich vermieden, und wenn der Begriff des Punktes eingeführt wird, so geschieht dies in so abstrakter Form, daß die Gefahr einer unrichtigen oder auch nur der Methode zuwiderlaufenden Verwendung geometrischer Vorstellungen ausgeschlossen wird. Dieser prinzipielle Standpunkt erscheint gewissermaßen als Reaktion gegen die in der älteren Riemannschen Theorie üblichen, auf angebliche geometrische Evidenzen sich stützenden Beweisführungen. Bei einem Lehrbuch, welches tiefergehendes Interesse für den Gegenstand erst erwecken soll, nicht schon voraussetzen darf, würde eine solche abstrakte Einführung das Eindringen in die Theorie nur unnötig erschweren. Das hier von Anfang an benutzte Hülfsmittel der Reihenentwicklung hebt diesen Übelstand, ohne darum die Strenge der Deduktion irgendwie zu beeinträchtigen."

Gerade diese Reihenentwicklungen sind das Muster, welches Hensel der Theorie der algebraischen Funktionen entnimmt und in Form seiner p-adischen Zahlen auf die Zahlentheorie überträgt.

Wird Mathematik erfunden oder entdeckt? Diese interessante Frage um das Wesen der Mathematik bewegte viele Geister zu Zeiten Hensels (und natürlich auch noch heute). Auf jeden Fall sind die p-adischen Zahlen ohne den Umbruch zur modernen Mathematik gegen Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts wohl undenkbar. Aus den Untersuchungen Georg Cantors zum Begriff der Unendlichkeit und den anschließenden furchtbaren und fruchtbaren Diskussionen und Kontroversen um eine Begründung und Axiomatisierung der Mathematik heraus entstand die *moderne Mathematik*. Die Beliebigkeit der Definitionen der Verknüpfungen und ihre daraus folgenden strukturellen Eigenschaften ist charakteristisch für den modernen Zugang der Mathematik und steht damit konträr zu dem größtenteils an praktischen Problemstellungen orientierten Forschen früherer Generationen.[19] Einhergehend mit diesem Paradigmenwechsel ergibt sich eine Professionalisierung der Mathematik (mit regelmäßig publizierten Zeitschriften, Ausbau der Fachliteratur, sowie akzeptabel ausgestatteten, weitgehend unabhängigen Universitäten und ersten nationalen und internationalen Konferenzen). Ein fruchtbarer Boden für freies und vielfältiges Denken! Und insbesondere die Möglichkkeit, über die *gewöhnliche Definition der Größe* hinwegzugehen, wie es Hensel letztlich bei seinen unendlichen p-adischen Reihen vollführte.

---

[18] Beispielsweise wird hier der Begriff des *Divisors* der Kroneckerschen Teilbarkeitstheorie algebraischer Zahlen entliehen und erstmals in der Theorie der algebraischen Funktionen verwendet.

[19] "Modernism in mathematics did not only mean new foundations for mathematics, although they, naturally, attracted the attention of philosophers. It also meant new mathematical objects inaccessible in any other way. (...) The axiomatic method in geometry produced a number of novelties (...)" schreibt Jeremy Gray [41], S. 235, und führt u.a. die nicht-archimedischen Geometrien und die Henselschen p-adischen Zahlen als Beispiele an.

Birgit Petri schreibt hierzu: "Hensel wurde als enger Schüler Kroneckers wahrgenommen. Methodisch wurde er zudem von Karl Weierstraß geprägt. In der Debatte über die Begrifflichkeiten und Methoden in der arithmetischen Theorie der algebraischen Zahlen argumentierte er 1894 für Kronecker (und damit gegen Dedekind). Ab 1897 vertrat er eine unabhängige Position." ([108], S.2). Hensels äußerte hierzu:[20]

> "In der Arithmetik sind die positiven ganzen Zahlen und nur sie durch die Natur gegeben; die Null, die negativen, die gebrochenen, die irrationalen und die imaginären Zahlen sind Symbole, welche man hinzugenommen hat, um in dem erweiterten Gebiete alle Rechnungsoperationen ausführen zu können. In welcher Weise man diese neu eingeführten Symbole bezeichnet, ist gleichgiltig. Ich möchte in den folgenden Betrachtungen eine von der gewöhnlichen verschiedene Darstellung dieser Zahlen einführen und zugleich die aus ihr folgenden neuen Prinzipien der Arithmetik zur Begründung einer neuen Theorie der algebraischen Zahlen benutzen. Ich bemerke dabei aber, daß man auf diesem Wege auch Mittel für die arithmetische Untersuchung der transzendenten Zahlen erhält, insbesondere allgemeine Kriterien dafür, ob eine Zahl algebraisch oder transzendent ist; denn die vorliegenden Untersuchungen ergeben zum ersten Male eine notwendige Bedingung dafür, daß eine vorgelegte Zahl algebraisch und nicht transzendent ist, und zwar stimmt dieselbe wörtlich mit dem Cauchy-Puiseuxschen Kriterium für die algebraischen Funktionen einer Variablen überein."

Der erste Satz dieses Zitates liegt dem Kroneckerschen Standpunkt "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." (cf. [142], S. 15) sehr nahe. Tatsächlich war Hensels ursprüngliche Definition seiner p-adischen Zahlen eine derart explizite im Sinne des Berliner Konstrukivismus, dass deren Menge streng genommen nur abzählbar war (vgl. Petri [108], S. 33). Insofern ist Hensel in seiner Methodik zu Beginn ein Vertreter der Gegenmoderne, die Gegenstände seiner Studien, die p-adischen Zahlen selbst, aufgrund ihrer innermathematischen Relevanz jedoch modern. Letztlich entwickelt sich seine Theorie der p-adischen Zahlen dermaßen rasant, insbesondere dank der vielseitigen nicht-konstruktiven Methoden (wie insbesondere das folgende Kapitel zeigt), dass sein klar umrissener Standpunkt zunehmend verschwindet und Hensel gegen Ende seines Schaffens, ab den 1920er Jahren, eine liberale Position vertrat, wie sie tatsächlich auch typisch war für die Vertreter seiner Zunft zu und seit dieser Zeit.

3. Vervollständigung der rationalen Zahlen

Hensel benutzte seine p-adischen Zahlen für eine alternative Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. Interessant sind für uns im Folgenden aber vielmehr analytische und elementar-arithmetische Entwicklungen, welche sich im Anschluss an Hensels Veröffentlichung seiner zwei Monographien [60, 61] zu diesem Thema ergeben haben. Hier ist zunächst die von Hensels "Maßzahl" (s.o.) inspirierte, in den Jahren 1912/13 von József Kürschák [78] begründete Theorie der Bewertungen (Absolutbeträge) sowie die Charakterisierung der Vervollständigungen der rationalen Zahlen durch Alexander

[20] [57], S. 51; für das gegen Ende des Zitates angesprochene Kriterium von Augustin Louis Cauchy und Victor Puiseux verweisen wir auf Bottazini & Gray [13].

Ostrowski [104] zu nennen. Während Kürschák seine Studien [78] in Budapest, fernab der bisherigen Schauplätze, durchführte, schrieb der gebürtige Kiewer Weltenbummler Ostrowski seine Arbeit [104] 1916 bei Hensel in Marburg noch vor der Göttinger Promotion.

ABBILDUNG 2. Von links nach rechts Vervollständiger der rationalen Zahlen: Georg Cantor (1845-1918), József Kürschák (1864-1933), Alexander Ostrowski (1893-1986). Cantors Vervollständigung findet sich in einem Artikel [17] zu trigonometrischen (Fourier-) Reihen aus dem Jahr 1872, also noch vor seinen bahnbrechenden Arbeiten zur Begründung der Mengenlehre; seiner Konstruktion der reellen Zahlen ging lediglich eine ähnliche, weniger verbreitete von Charles Méray [91] voran. Diese Arbeiten lösen die von Weierstraß aufgeworfene Frage nach einer Begründung irrationaler Zahlen.

Die grundlegenden Rechenoperationen, die in der Algebra eingesetzt werden, sind Addition und Multiplikation, deren Inverse sowie das Ziehen von Wurzeln; in der Analysis hingegen ist es entscheidend, Grenzprozesse durchführen zu können, wie bei der Differentiation. Bekanntlich existieren konvergente Folgen rationaler Zahlen mit einem irrationalen Grenzwert; damit ist $\mathbb{Q}$ *nicht vollständig* (bzgl. eines jeden Absolutbetrags) und für Zwecke der Analysis ungeignet. Beispielsweise konvergiert die Folge der durch

$$x_0 := 1, \quad x_{n+1} := \frac{x_n}{2} - \frac{1}{x_n} \left(= x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \right) \qquad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

definierten rationalen Zahlen x_n gegen $\sqrt{2}$; dies zeigt das Näherungsverfahren von Isaac Newton mit dem Polynom $P = X^2 - 2$ (welches eben $\sqrt{2}$ als Nullstelle besitzt).[21] Im Falle der p-adischen Zahlen betrachte man etwa die Thue-Morse–Folge

$$t_0 \;\; t_1 \;\; t_2 t_3 \;\; t_4 \ldots t_7 \;\; t_8 \ldots t_{15} \;\; \ldots \; = \; 0\ 1\ 10\ 1001\ 10010110\ \ldots\ ,$$

welche Fixpunkt der Iteration $0 \mapsto 01$ und $1 \mapsto 10$ ist (alternativ entsteht ein Block $t_{2^j} \ldots t_{2^{j+1}-1}$ aus den Blöcken $t_0\, t_1 \, \ldots \, t_{2^{j-1}} \ldots t_{2^j-1}$ durch Invertieren der Ziffern $0 \leftrightarrow 1$ bzw. $t_{2n} = t_n$ und $t_{2n+1} = 1 - t_n$ bei $t_0 = 0$). Diese Folge ist fälschlicherweise nach Axel Thue [135] und Marston Morse [98] benannt, welche unabhängig voneinander Anfang des 20. Jahrhunderts diese in unterschiedlichen Kontexten studierten und u.a zeigten, dass die Folge der Ziffern t_m nicht periodisch ist; allerdings hatte bereits 1851 Eugéne Prouhet

[21] Newton hatte dies bereits 1666 in seiner Arbeit *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* formuliert, welche allerdings erst 1711 publiziert wurde; Hintergrund ist die Approximation des Differentialquotienten durch Differenzenquotienten; vgl. Sonar [130], S. 383 ff.

[110] die Thue-Morse–Folge im Zusammenhang mit dem Prouhet-Tarry-Escott–Problem studiert.[22] Definiert man hierzu die p-adische Zahl α als Grenzwert der rationalen Zahlen

$$\sum_{m=0}^{M} t_m p^m = 0 + 1 \cdot p + 1 \cdot p^2 + 0 \cdot p^3 + \ldots + t_M p^M \tag{2}$$

bei gegen unendlich wachsendem M, so ergibt sich α aufgrund der erwähnten Nichtperiodizität der t_m nach dem Ergebnis aus dem vorangegangenen Paragraphen zu p-adischen Entwicklungen als irrational.

Die oben angesprochene analytische Hürde der Unvollständigkeit wird klassischerweise durch die Konstruktion der reellen Zahlen beseitigt, und es gibt verschiedene Möglichkeiten[23], diese Hürde zu nehmen. József Kürschák [78] verallgemeinerte Cantors Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ mittels so genannter Cauchy-Folgen [17] und gewann damit die p-adischen Körper $\mathbb{Q}_p$ vermöge der p-adischen Absolutbeträge in vollkommener Analogie und völlig gleichberechtigt zum reellen Fall.

Sei hierzu $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper, dann induziert ein Absolutbetrag (wie im ersten Paragraphen durch i)-iii) charakterisiert, bloß nun mit allgemeinem $\mathbb{K}$ anstelle von $\mathbb{Q}$) einen Abstand $d(x, y) := |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{K}$, womit folglich $\mathbb{K}$ in moderner Sprache ein metrischer Raum ist. Im Falle p-adischer Absolutbeträge mag das ungewohnte Distanzkonzept unerwartete Eigenschaften mit sich bringen, beispielsweise bedingt die automatisch gültige verschärfte Dreiecksungleichung, dass alle p-adischen Dreiecke gleichschenklig sind.[24] Von einer unendlichen Reihen der Gestalt (1) ausgehend betrachten wir die Folge ihrer Partialsummen $\alpha_n = \sum_{m_0 \leq m \leq n} a_m p^m$; diese bilden eine p-adisch konvergente Cauchy-Folge[25] (wie sich unter Berücksichtigung des p-adischen Absolutbetrages mit Hilfe der verschärften Dreiecksungleichung zeigt und zugleich gewöhnungsbedürftige Aspekte der p-adischen Analysis offenbart). Allgemeiner ist eine unendliche Reihe $\sum_m b_m$ genau dann p-adisch konvergent, wenn $|b_m|_p$ mit $m \to \infty$ gegen null konvergiert (was im Reellen i.A. falsch ist). Bezeichnet nun $\mathcal{C}_p$ die Menge *aller* p-adisch konvergenten Cauchy-Folgen (α_n) (ohne die Voraussetzung der Form (1)), so werden Addition und Multiplikation zweier solcher in natürlicher Weise durch Superposition erklärt:

$$(\alpha_n) + (\beta_n) := (\alpha_n + \beta_n) \qquad \text{und} \qquad (\alpha_n) \cdot (\beta_n) := (\alpha_n \cdot \beta_n).$$

Tatsächlich ist darüber hinaus auch die Division mit einer p-adischen Folge möglich, wenn deren Grenzwert von null verschieden ist. Nun erklärt man zwei p-adisch konvergente Folgen als äquivalent, wenn ihre Differenz gegen null konvergiert, und nennt (der Eindeutigkeit wegen) die zugehörige Äquivalenzklasse von p-adisch konvergenten Folgen

---

[22] Der Mathematiker und zeitweise Schachweltmeister Max Euwe [32] benutzte 1929 die Thue-Morse–Folge mit der Kodierung der Zugfolge Sb1-c3, Sb8-c6; Sc3-b1, Sc6-b8 für 0 und Sg1-f3, Sg8-f6; Sf3-g1, Sf6-g8 für 1 zum Nachweis, dass gemäß den zu dieser Zeit gültigen Regeln unendlich lange Schachpartien möglich sind trotz der *deutschen Regel*, welche eine Partie zwangsläufig beendet, wenn dieselbe Folge von Zügen mit allen Figuren in denselben Positionen dreimal hintereinander vorkommt.

[23] etwa mit Dedekindschen Schnitten und Intervallschachtelung

[24] Gegeben x, y, z, wobei etwa $d(x, z) = |x - z|_p \neq |y - z|_p = d(y, z)$, folgt mit der verschärften Dreiecksungleichung, dass $d(x, y) = |x - y|_p$ gleich $\max\{d(x, z), d(y, z)\}$ ist.

[25] also Folgen $(a_n)_n$ mit der Eigenschaft, dass für hinreichend große m, n die Differenz von Folgegliedern $a_m - a_n$ beliebig klein ist

eine *p-adische Zahl* und bezeichnet ihre Menge mit $\mathbb{Q}_p$, dem *Körper der p-adischen Zahlen.*[26] Mit Hilfe der konstanten Folgen finden sich sämtliche rationalen Zahlen wieder und diese liegen dicht in $\mathbb{Q}_p$. Letzteres folgt vermöge der eleganten Fortsetzung des p-adischen Absolutbetrages von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}_p$ durch den Grenzwert der reellen Cauchy-Folge $(|\alpha_n|_p)$ für eine Folge (α_n) in $\mathbb{Q}_p$ definierten Wert $|(\alpha_n)|_p = \lim_{n\to\infty} |\alpha_n|_p$.

Im Gegensatz zum Standardabsolutbetrag auf $\mathbb{R}$ sind die Werte der p-adischen Beträge diskrete Größen. Hensel's 'Maßzahlen' bzw. Kürscháks p-adische Bewertungen sind also gewissermaßen ein mathematisches Pendant zu den diskreten Zuständen in der ebenfalls um die Jahrhundertwende aufkommenden Quantenphysik von Max Planck, mit dem Hensel während seiner Berliner Zeit auch persönlich verkehrte (cf. Hasse [50], S. 3). Hierzu äußerte Planck selbst:

> "Da griff M. Planck in dem Bestreben, eine Deutung der experimentellen Tatsachen auf Grund der beiden Hauptsätze der Thermodynamik durchzusetzen, zu der radikalen Hypothese, daß die Mannigfaltigkeit der Zustände, die ein schwingendes und strahlendes Gebilde besitzen kann, eine diskrete abzählbare ist, und daß die Unterschiede je zweier Zustände des Gebildes durch eine endliche universelle Konstante, das elementare Wirkungsquantum, charakterisiert werden. Damit war freilich ein grundsätzlicher Bruch mit den bisherigen physikalischen Anschauungen vollzogen, denn bisher galt in jeder Theorie der Zustand eines physikalischen Gebildes als stetig veränderlich."[27]

Tatsächlich liefert die obige Konstruktion der p-adischen Zahlen (ebenso wie Cantors reelle Vervollständigung) einen bzgl. des fortgesetzten p-adischen Absolutbetrages vollständigen[28] Körper; hier konvergieren alle aus $\mathbb{Q}_p$ gebildeten konvergenten Folgen mit einem Grenzwert in $\mathbb{Q}_p$. Sofort stellt sich die Frage, ob es über diese Vervollständigungen hinaus weitere gibt. Zwei Absolutbeträge (über ein und demselben Körper) heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie induzieren (d.h. jede bzgl. des einen Absolutbetrages offene Menge auch offen bzgl. des anderen ist und umgekehrt). Alexander Ostrowski gab 1918 eine komplette Beschreibungen der möglichen Vervollständigungen des rationalen Zahlenkörpers:

Jeder nicht-triviale Absolutbetrag[29] *auf $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu entweder dem Standardabsolutbetrag oder einem p-adischen Betrag $|\,.\,|_p$, wobei p eine Primzahl ist. Insbesondere erlaubt $\mathbb{Q}$ folgende, paarweise nicht-isomorphe Vervollständigungen*

$$\mathbb{Q} \qquad \overset{\text{Vervollständigung}}{\longrightarrow} \qquad \mathbb{Q}_2, \mathbb{Q}_3, \ldots, \mathbb{Q}_p, \ldots \quad \text{und} \quad \mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$$

für jede Primzahl p.

Die Notation $\mathbb{Q}_\infty$ für $\mathbb{R}$ erlaubt hierbei eine einheitliche Notation. Mit Ostrowskis Resultat gibt es also neben der altbekannten Vervollständigung der rationalen Zahlen mittels des Standardabsolutbetrages die p-adischen Vervollständigungen und sonst keine weitere.

---

[26] Präziser: $\mathcal{C}_p$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement und die Teilmenge $\mathcal{M}_p$ aller konvergenten Nullfolgen bildet hierin ein maximales Ideal, womit der Quotient $\mathcal{C}_p/\mathcal{M}_p$ ein Körper ist.

[27] [109], S. 20

[28] einen *perfekten* Körper in der damaligen Sprache; tatsächlich findet sich dieser Begriff noch in van der Waerdens Lehrbuch [138, 139].

[29] Der triviale Betrag ist definiert als $|x| = 1$ für alle $x \neq 0$ und somit relativ langweilig.

Wie finden wir in unserem Konstrukt $\mathbb{Q}_p$ jedoch Hensels p-adische Zahlen aus dem ersten Paragraphen wieder? Zu einem $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ gehört eine p-adisch konvergente (modulo Nullfolgen eindeutige) Folge rationaler Zahlen α_n. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass die α_n ganzzahlig sind und modulo p^n eine eindeutige Darstellung der Form $\alpha_n \equiv a_0 + a_1 p + \ldots + a_{n-1}p^{n-1} \bmod p^n$ mit ganzzahligen Ziffern $0 \leq a_m < p$ besitzen. Im Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dies genau die eingangs aufgetretenen unendlichen Reihe der Gestalt (1). Nach Konstruktion ist diese Darstellung eindeutig.

Ostrowskis Beweis liefert u.a. die folgende Charakterisierung: *Ein Absolutbetrag $|\,.\,|$ über $\mathbb{Q}$ ist genau dann äquivalent zu einem p-adischen, wenn die Absolutbeträge der natürlichen Zahlen beschränkt sind*; in diesem Fall wird das Supremum angenommen und determiniert die Primzahl p. Solche Absolutbeträge werden in Abgrenzung zum Standardabsolutbetrag und seinen topologisch äquivalenten als *nicht-archimedische* Beträge bezeichnet (in Anlehnung an das im p-adischen ungültigen Archimedische Lemma der reellen Analysis (wonach es zu beliebigen ganzen Zahlen $x, y \neq 0$ eine natürliche Zahl n gibt, so dass $|ny| > |x|$ mit dem Standardabsolutbetrag). Mit der Ostrowskischen Charakterisierung verwandt ist folgende bemerkenswerte Geschlossenheitsrelation in Form einer Produktformel: *Für jede rationale Zahl $\alpha \neq 0$ gilt*

$$\prod_{p \leq \infty} |\alpha|_p = 1;$$

hierbei ist das Produkt über sämtliche Primzahlen p erhoben und zusätzlich dem Symbol ∞, wobei (ähnlich der Notation $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ oben auch hier im Sinne einer vereinfachten Sprache) $|\alpha|_\infty$ für den reellen Standardabsolutbetrag von α steht, und somit Information über das Vorzeichen von α trägt, während die nicht-archimedischen Beträge die Primzahlpotenzen für die Primfaktorzerlegung von α beisteuern. Insofern besitzen die verschiedenen inäquivalenten Absolutbeträge einer rationalen Zahl Information übereinander; sind etwa alle Faktoren im obigen Produkt bis auf einen einzigen bekannt, so ergibt sich der letzte notwendig aus den anderen.

Die Untersuchungen von Kürschák und Ostrowski wurden später fortgeführt und wesentlich verallgemeinert von u.a. Friedrich Karl Schmidt, Helmut Hasse und Oswald Teichmüller sowie Wolfgang Krull.[30]

4. Die ganzen p-adischen Zahlen und Hensels Lemma

Die ganzen Zahlen bilden das Herz der Zahlentheorie. Deren Analogon im Kreis der p-adischen Zahlen nähern wir uns durch eine weitere, diesmal algebraische Konstruktion.

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die ineinander geschachtelten Restklassenringe

$$\ldots \to \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \ldots \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

mit den jeweiligen Projektionsabbildungen $\pi_n : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, x \mapsto x \bmod p^n$. Der zugehörige so genannte *projektive Limes*

$$\lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} := \left\{ (x_n) \in \prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \,:\, \pi_n(x_{n+1}) = x_n \right\}$$

[30] siehe Roquette [117]

ist ein formales Produkt von Ringen, der die Ringstruktur von jedem seiner Faktoren erbt. Jedes Element $(x_n) \in \lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ steht für eine p-adisch konvergente Cauchy-Folge ganzer Zahlen $\alpha_n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}$ mit der Eigenschaft $x_n \equiv \alpha_n \bmod p^n$. Entsprechend lassen sich Elemente (x_n) des projektiven Limes mit p-adischen Reihen der Form (1) mit $m_0 = 0$ identifizieren und wir erhalten

$$\lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \cong \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m p^m \,:\, 0 \leq a_m < p \right\}.$$

Die Elemente der Menge auf der rechten Seite sind die *ganzen p-adischen Zahlen*, und wir notieren ihre Gesamtheit als $\mathbb{Z}_p$. In Analogie zu den ganzen Zahlen gilt: *$\mathbb{Z}_p$ ist ein kommutativer Ring* (also insbesondere bzgl. Addition und Multiplikation abgeschlossen; ferner existieren additiv Inverse). Unsere wohlbekannte Menge $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen entsteht hieraus elegant als der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}_p$.[31] Die p-adischen Zahlen besitzen also im Gegensatz zu den reellen Zahlen ein sinnvolles Analogon ganzer Zahlen. Und die mit unliebsamen Nullteilern[32] behafteten Restklassenringe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ mit all ihren arithmetischen Informationen werden durch den Körper $\mathbb{Q}_p$ ersetzt.

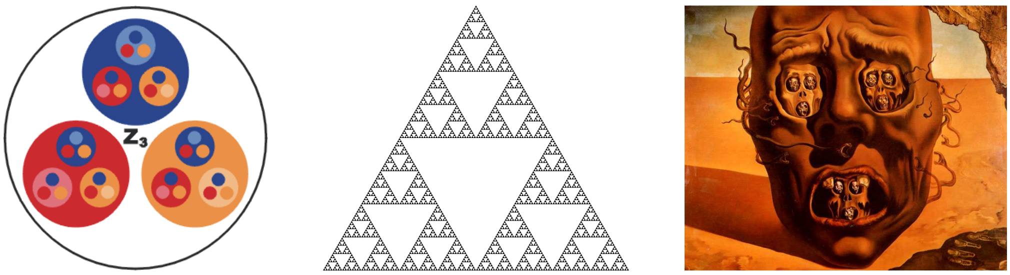

ABBILDUNG 3. Links eine Visualisierungen der Menge der ganzen 3-adischen Zahlen mit den disjunkten Teilmengen $(a_0 + a_1 \cdot 3 + \ldots a_n \cdot 3^n)\mathbf{Z}_3$ in verschiedenen Farben gemäß den Restklassen a_j mod 3. Dies erinnert an das mittig stehende Sierpiński-Dreieck, benannt nach dem Zahlentheoretiker Wacław Sierpiński. Den genauen Zusammenhang beleuchtet Albert Cuoco [25]. Rechts Salvador Dalis 'La Cara de la Guerra', welches während des zweiten Weltkrieges gemalt wurde.

Die obige Konstruktion der ganzen p-adischen Zahlen bringt (als projektiver Limes) Struktur mit sich (nämlich die eines kommutativen Rings). Diese strukturelle Herangehensweise ist symptomatisch für Teile der Entwicklung der Mathematik und insbesondere der Algebra im 20. Jahrhundert gegenüber der eher analytischen Denkweise des 19. Jahrhunderts. Einen wesentlichen Antrieb dieser Erneuerung der Algebra war die Entwicklung der modernen Algebra durch (hauptsächlich) Emmy Noether und Emil Artin in den 1920ern; die Mitschriften der Noetherschen und Artinschen Vorlesungen in Göttingen bildeten die Basis des extrem einflussreichen zweibändigen Lehrbuchs *Moderne Algebra* [138] von Bartel van der Waerden[33], welches wohl als erstes Lehrbuch einen projektiven Limes (etwas verkleidet als ineinandergeschachtelte Folge von Restklassen)

[31] Die Leser_in mag sich versuchen im Nachweis der Dichtheit von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_p$ sowie der Darstellung $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[p^{-1}] = \mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}\left[p^{-1}\right]$.

[32] Gilt $ab = 0$ wie beispielsweise $6 \cdot 10$ im Restklassenring modulo 15, so nennt man a und b Nullteiler; in einem Körper existieren keine Nullteiler.

[33] spätere Versionen unter dem Titel *Algebra* variieren im Inhalt teilweise deutlich und blieben bis in die 1980er weit verbreitet

zur Konstruktion der p-adischen Zahlen benutzte[34] und dabei auch ein eigenes Kapitel zur Bewertungstheorie enthielt[35]. Die topologische Variante des projektiven Limes wurde in den 1930ern intensiv von u.a. Solomon Lefschetz, Paul Alexandroff, Jacques Herbrand, David van Dantzig und Hans Freudenthal untersucht; letzterer gab mit seiner Arbeit [36] einen ersten Überblick. Erste Ansätze einer solchen Konstruktion finden sich jedoch bereits 1909/10 bei Luitzen Brouwer [14, 15].[36]

Eine jede Gleichung in ganzen Zahlen liefert eine Kongruenz (sogar unendlich viele); hingegen kann eine Kongruenz auf einer Gleichung beruhen, muss aber nicht. Beispielsweise sind 42 und 13 kongruent modulo 29, nicht aber modulo irgendeiner anderen Primzahl. Der chinesische Restsatz besagt, dass *zu teilerfremden natürlichen Zahlen* $m_1, \ldots, m_n$ *und beliebigen ganzen Zahlen* $a_1, \ldots, a_n$ *genau eine Restklasse* $x \bmod m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ *mit*

$$x \equiv a_j \bmod m_j \qquad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n$$

existiert.[37] Insofern bestimmen entsprechende lineare Kongruenzen ganze Zahlen in hinreichend kleinen Intervallen eindeutig. Hierbei steht jede Kongruenz für eine *lokale Information* hinsichtlich der Teilbarkeit bzgl. der Primfaktoren der Moduln m_j. Auf dieser simplen Beobachtung aufbauend lassen sich mit Hilfe der ganzen p-adischen Zahlen gewisse diophantische Gleichungen leichter untersuchen. Gegeben eine algebraische Gleichung

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_r) = 0,$$

wobei P ein Polynom in den Unbekannten $X_1, \ldots, X_r$ und ganzzahligen Koeffizienten ist, betrachten wir Systeme von Kongruenzen

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_r) \equiv 0 \bmod p^n \qquad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

wobei p sämtliche Primzahlen durchläuft. Zu einer jeden Primzahl p lassen sich die unendlich vielen Kongruenzen zu einer p-adischen Gleichung zusammenfassen; tatsächlich ist das Lösen einer Gleichung in $\mathbb{Z}_p$ sogar äquivalent zum Lösen dieser Kongruenzen. Hensel äußerte hierzu:

> "Jede rationale Gleichung (...) mit rationalen Zahlkoeffizienten zwischen beliebig vielen Zahlen des Körpers $K(\alpha)$ bleibt richtig, wenn man sie als Gleichung für den Bereich von $\mathfrak{p}$ auffaßt, und umgekehrt folgt aus dem Bestehen einer solchen Gleichung (...) für den Bereich von $\mathfrak{p}$, daß dieselbe Gleichung auch ihrer Größe nach erfüllt ist."[38]

---

[34][138], 3. Auflage, S. 256; hier schreibt van der Waerden, dass sich p-adische Zahlen gegenüber den p-adischen Cauchy-Folgen "etwas bequemer darstellen" durch eben jene "Restklassenfolgen". Mit der 7. Auflage 1966 des ersten Bandes wanderte das Kapitel über bewertete Körper in den zweiten Band [139] und ist dort ab der 5. Auflage 1967 zu finden.

[35]Im Vorwort der dritten Auflage schreibt van der Waerden "Schon in der zweiten Auflage wurde die Bewertungstheorie stark ausgebaut. Sie hat inzwischen in der Zahlentheorie und in der algebraischen Geometrie ihre Wichtigkeit immer mehr erwiesen. Daher habe ich das Kapitel Bewertungstheorie sehr viel ausführlicher und deutlicher gemacht." [138], S. V..

[36]Weitere Details zur Genese solcher Limiten und Verallgemeinerungen hiervon in der Kategorientheorie bespricht Saunders Mac Lane [85], S. 81.

[37]Die Lösung lässt sich explizit als $\sum_{j=1}^{n} a_j (m_1 \cdot \ldots \cdot m_n / m_j)^{\varphi(m_j)}$ angeben.

[38][60], S. 330; die Sprache und Notation weicht natürlich von der unseren ab.

Ein wesentliches Hilfsmittel in diesem Zusammenhang ist

Hensels Lemma. *Es sei $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ und für eine ganze p-adische Zahl x_1 gelte*

$$P(x_1) \equiv 0 \bmod p\mathbb{Z}_p \qquad \textit{und} \qquad P'(x_1) \not\equiv 0 \bmod p\mathbb{Z}_p.$$

Dann existiert eine ganze p-adische Zahl x mit

$$x \equiv x_1 \bmod p\mathbb{Z}_p \qquad \text{und} \qquad P(x) = 0.$$

Hier ist P' die Ableitung von P und $b \equiv a \bmod p^n\mathbb{Z}_p$ bedeutet, dass $b - a \in p^n\mathbb{Z}_p$. Hensels Lemma tritt bei Hensel das erste Mal ind er Veröffentlichung [57] von 1904 auf. Sein Beweis ist konstruktiv und dem Newtonschen Näherungsverfahren (s.o.) abgeguckt[39]. In vielen Beispielen erlaubt das Henselsche Lemma eine Antwort auf die Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung in ganzen p-adischen Zahlen. Tatsächlich liefert das Henselsche Lemma stets eine Lösung (falls überhaupt eine existiert), während das Newtonsche Näherungsverfahren u.U. nicht zielführend ist.

Nahezu zeitgleich, sogar ein Jahr vor Hensel, bewies Hermann Kühne [76] das Resultat, welches nun als Hensels Lemma bekannt ist. Und tatsächlich finden sich bereits in Gauß' Tagebuch [39] in den Einträgen §76-79 bzw. in §373-375 der erst durch Dedekind posthum veröffentlichten *Disquisitiones generales de congruentiis* (enthalten in [38]) im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen zur Kreisteilungsgleichung $X^m - 1 = 0$ dem Henslschen Lemma ähnliche Ansätze; siehe hierzu auch Frei [35], S.194.

Zur Illustration des Henselschen Lemmas geben wir mit der Bestimmung der Einheiten in $\mathbb{Z}_p$ ein Beispiel: Hierzu betrachten wir zu gegebenem $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ ungleich null das Polynom $P = \alpha X - 1$. Genau dann, wenn die Gleichung $P(X) = 0$ eine Lösung in $\mathbb{Z}_p$ besitzt, ist α eine Einheit, also invertierbar innerhalb $\mathbb{Z}_p$ und die Lösung ist das Inverse von α. Offensichtlich kann α im Falle $\alpha \in p\mathbb{Z}_p$ nicht invertierbar sein. Wenn nun $\alpha \notin p\mathbb{Z}_p$ ist, gilt

$$P'(X) = \alpha \not\equiv 0 \bmod p\mathbb{Z}_p,$$

und enstprechend ist die Kongruenz $P(X) = \alpha X - 1 \equiv 0 \bmod p\mathbb{Z}_p$ lösbar. Nun liefert Hensels Lemma die Existenz einer ganzen p-adischen Zahl α^{-1} mit $P(\alpha^{-1}) = 0$. Also gilt: *Eine ganze p-adische Zahl α ist genau dann invertierbar in $\mathbb{Z}_p$, wenn $\alpha \in \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$*; damit ist die Gruppe der Einheiten von $\mathbb{Z}_p$ gegeben durch $\mathbb{Z}_p^* := \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p = \{\alpha \in \mathbb{Z}_p \,:\, |\alpha|_p = 1\}$. Als weitere einfache Anwendung von Hensels Lemma lassen sich die Quadrate unter den Einheiten als diejenigen charakterisieren, für die $\alpha \bmod p\mathbb{Z}_p$ ein quadratischer Rest $\bmod\, p$ ist. Insbesondere ist $\mathbb{Q}_p$ also nicht algebraisch abgeschlossen, lässt sich aber mit einer Konstruktion ähnlich der von $\mathbb{C}$ (wenngleich komplizierter) algebraisch abschließen, was eingehend von u.a. Marc Krasner und Karel Rychlik untersucht wurde. Ferner zeigt sich so, dass *eine rationale Zahl genau dann ein Quadrat ist, wenn sie ein Quadrat in jedem Körper $\mathbb{Q}_p, p \leq \infty$ (also inkl. $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$), ist.* Unmittelbare Folgerungen hieraus sind die Nicht-Isomorphie verschiedener Körper p-adischer Zahlen und natürlich auch $\mathbb{R}$ (wie auch schon oben angerissen). Dieses letzte Beispiel der Quadrate führt über zu unserem

[39]Bei Hensel liest sich das wie folgt: "(...) so besitzt die obige Gleichung eine p-adische Wurzel, für welche $\xi \equiv \xi_0 \pmod{p^{\rho-\rho'}}$ ist, und welche mit jeder vorgegebenen Genauigkeit durch die Newtonsche Näherungsmethode gefunden werden kann, vorausgesetzt, daß die Ordnungszahlen $\rho', \rho'', \ldots \rho^{(\nu)}$ bei den sukzessiven Annäherungen ungeändert bleiben." [60], S. 74. Hier sind die 'Ordnungszahlen' die Exponenten in der p-adischen Entwicklung.

nächsten Thema und illustriert bereits inwieweit die p-adischen Zahlen bei Fragen zu Quadraten hilfreich sein können.

5. Krise: Der gescheiterte Transzendenzbeweis

Mit der expliziten Entdeckung transzendenter Zahlen durch Joseph Liouville [84] 1844 und den Transzendenznachweisen der Eulerschen Zahl $e = \exp(1)$ durch Charles Hermite [63] 1873 und der Kreiszahl π durch Ferdinand Lindemann [82] 1882 waren Fragen zur Transzendenz ein zentrales Thema dieser Zeit. Einerseits lieferte Cantor [18] mit seinem mengentheoretischen Ansatz einen nicht-konstruktiven Beweis der Existenz überabzählbar vieler transzendenter Zahlen, andererseits entwickelten Hilbert, Adolf Hurwitz und nicht zuletzt Weierstraß Verallgemeinerungen des Hermiteschen Ansatzes und der Lindemannschen Erweiterung. Mit Blick auf die letztgenannten Bestrebungen hatte Hensel die Idee, mit Hilfe seiner p-adischen Zahlen eine neue Methode für Transzendenzbeweise zu entwickeln. Gegenüber Hilbert äußerte Hensel einen verwandten Gedanken bereits in den späten 1880er Jahren (gemäß einem Eintrag von 1888 in Hilberts Reisetagebuch, cf. Petri [108], S. 313). Dieser Wunsch gipfelte in einem 1905 auf der Naturforscherversammlung in Meran vorgetragenen und auch als [58] publizierten fehlerhaften Beweisversuch der Transzendenz von e.

Hensels Argument basierte auf der Exponentialreihenentwicklung

$$e^p = 1 + \frac{p}{1} + \frac{p^2}{2!} + \frac{^3}{3!} + \ldots = 1 + p(1 + \ldots) = 1 + p\epsilon$$

mit einer Einheit ϵ. Insofern genügt e also der algebraischen Gleichung $X^p = 1 + p\epsilon$; hierbei ist das Polynom $X^p - (1 + p\epsilon)$ nicht weiter zerlegbar[40]. Wäre nun e algebraisch, also Wurzel einer algebraischen Gleichung n-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, dann bestünde selbige ebenfalls im Körper der p-adischen Zahlen mit einem Grad, der kleiner oder gleich n ist. Wählt man nun $p > n$, so gäbe es für e zwei verschiedene, nicht weiterzelegbare algebraische Gleichungen für e, was der eindeutigen Faktorisierung von Polynomen mit ganzen p-adischen Zahlen widerspräche.

Oskar Perron [106] wies bereits in seinem Habilitationsvortrag im Sommer 1906 wohl als Erster auf Lücken hin, welche sich letztlich nicht schließen ließen; Hensel räumte die Lücke kurze Zeit danach selbst ein [59]. Auch die darauf aufbauenden Resultate, wie etwa Hensels Versuch, die Transzendenz von π p-adisch zu beweisen, scheiterten damit. Der wesentliche Makel des Hensels Beweisversuches besteht in dem ungenierten Gebrauch der Exponentialreihe in unterschiedlichen Zahlbereichen. Ullrich [136] vergleicht dies mit der Kontroverse zwischen Johann Bernoulli und Gottfried Leibniz über die Mehrdeutigkeit des komplexen Logarithmus. Neal Koblitz [73], S. 82-84, gibt explizite Beispiele von unendlichen Reihen mit rationalen Termen, die sowohl p-adisch als auch bzgl. des Standardabsolutbetrages konvergieren, jedoch mit unterschiedlichen rationalen Grenzwerten.[41] Für eine detaillierte Analyse des fehlerhaften Ansatzes verweisen wir auf die Arbeiten von Ullrich [136, 137] und Petri [108], S. 276 ff.

---

[40] also *irreduzibel* in der Sprache der Algebra, wie sich mit dem Kriterium von Schönemann-Eisenstein nachweisen lässt

[41] In diesem Kontext gibt er auch folgenden *fehlerhaften* Beweis der Irrationalität von π: Angenommen, $\pi = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und p wäre eine ungerade Primzahl, die nicht in a aufgeht, so folgte $0 = \sin(pb\pi) = \sin(pa) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(pa)^{2n+1}/(2n+1)! \equiv pa \bmod p^2$, ein Widerspruch. Wo liegt der Fehler?

Hensels Idee bildete jedoch die Grundlage weiterer Untersuchungen zur p-adischen Analysis, u.a. durch seinen Schüler Reinhold Straßmann, aber auch später Marc Krasner sowie Alexander Grothendieck und John Tate unter dem Stichwort 'Rigid analytic spaces' in den 1960ern mit einem wesentlich abstrakteren und allgemeinerem Zugang.[42] Mittlerweile entdeckten Jean-Paul Bézivin und Philippe Robba [7] einen p-adischen Beweis des allgemeineren Satzes von Lindemann–Weierstraß (inkl. der Transzendenz von π und e)[43].

Birgit Petri [108], S. 11, schreibt im Kontext des gescheiterten Henselschen Transzendenzbeweis:

> "Während er sich in der Arbeit 1904 auf die moderne Kraft der Neuschöpfung verließ, kehrte er in seinem Vortrag 1905 zur Idee des Zusammenhangs aller möglichen Zahlen zurück. Da seine Intuition aber fehlschlug, wirkten die p-adischen Zahlen ziellos modern. Es gab kein naheliegendes Anwendungsgebiet und vermutlich hielten es andere Mathematiker für gefährlich, mit ihnen zu arbeiten, nachdem Hensel selbst von seinen Intuitionen getäuscht worden war."

Insofern besteht mit dem misslungenen Versuch eines Transzendenzbeweises mit den neuen p-adischen Zahlen eine bemerkenswerte Parallele zur zeitgleich aufkeimenden Debatte über die Grundlagen und Methoden der Mathematik und letztlich der Grundlagenkrise selbst.

Hensel wendete sich anschließend von Transzendenzbeweisen ab und den quadratischen Formen zu, wie es auch die wechselnden Inhalte seiner Lehrbücher [60] und [61] verdeutlichen. Dieses Mal ist er von einer guten Intuition geleitet.

6. Quadratische Formen und das Lokal-Global-Prinzip

> "Unsere jetzige Kenntnis der Theorie der quadratischen Zahlkörper setzt uns in den Stand, die Theorie der quadratischen Formen mit beliebig vielen Variabeln und beliebigen algebraischen Zahlencoefficienten erfolgreich in Angriff zu nehmen. Damit wird insbesondere zu der interessanten Aufgabe, eine quadratische Gleichung beliebig vieler Variabeln mit algebraischen Zahlencoeffizienten in solchen ganzen oder gebrochenen Zahlen zu lösen, die in dem durch die Coefficienten bestimmten algebraischen Rationalitätsbereiche gelegen sind."

Dies ist David Hilberts Formulierung seines elften Problems, gestellt anlässlich seines berühmten Vortrages auf dem Internationalen Mathematiker Kongress (ICM) 1900 in Paris. Der nachstehende Satz von Hasse-Minkowski löst dieses elfte Hilbertsche Problem im Falle rationaler Koeffizienten und endlicher algebraischer Erweiterungen derselben.[44] Dessen Formulierung benötigt jedoch einige einleitende Worte.

Quadratische Formen nehmen einen zentralen Platz in den zahlentheoretischen Studien des ausgehenden 18. und 19. Jahrhunderts ein. Auf speziellen Beobachtungen von Pierre de Fermat und seiner Korrespondenten im 17. Jahrhundert aufbauend entwickelten

[42] siehe Bosch [12] für Details und einen geschichtlichen Abriss

[43] und Frits Beukers, Bézivin und Robba [6] entfernten hiervon noch den schwierigen p-adischen Teil mittels eines elementaren Arguments, womit letztlich ein weiterer reeller Beweis gefunden wurde

[44] siehe hierzu Yandell [148], S. 247

Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Adrien-Marie Legendre, Carl Friedrich Gauß, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Henry John Steven Smith, um nur einige zu nennen, eine allgemeine Theorie zur Behandlung quadratischer Formen und Fragestellungen bzgl. ihres Wertebereichs. Allgemein ist eine *quadratische Form* q in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ definiert durch ein homogenes Polynom der Form

$$q = q(\mathbf{X}) = \sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{ij} X_i X_j \qquad \text{mit} \quad \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$$

und Koeffizienten a_{ij} aus einem Ring oder Körper $\mathbb{K}$; der Einfachheit halber denken wir zunächst an $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und also rationale Koeffizienten. Zwei Formen q_1 und q_2 heißen *äquivalent*, wenn die eine durch eine umkehrbare ganzzahlige lineare Transformation aus der anderen hervorgeht; präziser formuliert müssen hierfür ganze Zahlen a_{ij} existieren, so dass die Identität

$$q_1(\mathbf{X}) = q_2(\mathbf{Y}) \qquad \text{mit} \quad Y_j = a_{i1} X_1 + \ldots + a_{in} X_n \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

und $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ besteht.[45] Mit Hilfe quadratischer Ergänzung lassen sich die gemischten Terme beseitigen und die Unbekannten treten lediglich noch als Quadrate auf, was auch unter dem Namen der Hauptachsentransformation in der analytischen Geometrie bekannt ist und oftmals eine vereinfachte Darstellung liefert.

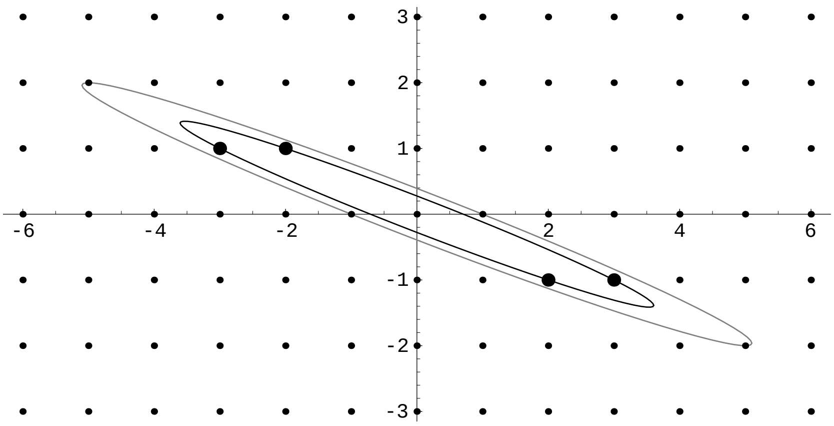

ABBILDUNG 4. Kegelschnitte lassen sich durch quadratische Formen beschreiben. Die Ellipsen $E_c : 2X^2 + 10XY + 13Y^2 = c$ mit $c = 1$ und $c = 2$ und Gitterpunkte $(x, y) \neq \mathbf{0}$. Eine geeignete Transformation überführt E_2 in $(15 - \sqrt{221})\mathcal{X}^2 + (15 + \sqrt{221})\mathcal{Y}^2 < 4$, woraus man $\mathrm{vol}(E_2) = 2\pi > 2^2$ gewinnt, und der Minkowskische Gitterpunktsatz liefert die Existenz von Gitterpunkten $(x, y) \neq \mathbf{0}$, welche notwendig auf E_1 liegen.

Eine zentrale Frage im Themenkreis der Formen ist, welche Zahlen durch eine gegebene quadratische Form dargestellt werden, und, falls also die quadratische Gleichung $q(\mathbf{X}) = m$ bei gegebenem m lösbar ist, welcher Gestalt die Lösungen $\mathbf{x}$ sind. Wichtig ist hier anzumerken (und unschwer zu beweisen), dass äquivalente Formen dieselben Zahlen darstellen. Weil quadratische Formen homogen sind, ist $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ stets eine

[45] Für Expert_innen der linearen Algebra: Mit Hilfe der aus den Koeffizienten gebildeten symmetrischen Matrix $\mathcal{Q} = (\alpha_{ij})$ (also $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$) gilt $q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\,\mathcal{Q}\,\mathbf{X}^{\mathrm{t}}$, und zwei Formen $\mathbf{X}\mathcal{Q}\mathbf{X}^{\mathrm{t}}, \mathbf{X}\tilde{\mathcal{Q}}\mathbf{X}^{\mathrm{t}}$ sind genau dann äquivalent, wenn $\tilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{A}^{\mathrm{t}}$ mit einer Matrix $\mathcal{A} \in \mathsf{SL}_n(\mathbb{Z})$; hierbei ist $\mathsf{SL}_n(\mathbb{Z})$ die Gruppe aller $n \times n$-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante eins.

Lösung der Gleichung $q(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$; diese Lösung heißt trivial. Ist die Gleichung hingegen nicht-trivial lösbar, nennen wir die Form q *isotrop*[46] über $\mathbb{K}$, und bemerkenswerter Weise stellen solche isotropen Formen dann bereits jedes Körperelement dar: Gilt nämlich $q(\mathbf{x}) = 0$ mit einer isotropen und auf Hauptachsenform transformierten Form der Gestalt $q = \sum_{j=1}^n a_j X_j^2$ und $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit etwa $a_1 x_1 \neq 0$, so folgt über den Ansatz $y_1 = x_1(1+t)$ und $y_j = x_j(1-t)$ für $j = 2, \ldots, n$ nach einer kurzen Rechnung

$$\sum_{j=1}^n a_j y_j^2 = a_1 y_1^2 - a_1 x_1 (1-t)^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^n a_j x_j^2}_{=0} (1-t)^2 = 4a_1 x_1^2 t,$$

womit $t = m/(4a_1 x_1^2)$ bei variablem $m \in \mathbb{K}$ auf $q(y_1, \ldots, y_n) = m$ führt. Hierbei liegen die y_j in demselben Körper (etwa $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{Q}_p$) wie die x_j und m.

Eine simple Kongruenzbetrachtung wird bei der Frage nach Isotropie quadratischer Formen nicht ausreichen, denn wegen $x^2 \equiv x \bmod 2$ kann eine Untersuchung modulo 2 sicherlich nicht weiterführen; nun könnte man an Kongruenzen modulo 2^2 oder gar modulo höherer Zweierpotenzen denken, auch könnte man versucht sein, der einzigen geraden Primzahl[47] die Schuld zuschieben zu wollen, aber tatsächlich liefern erst die p-adischen Zahlen den richtigen Ansatz. Nichtsdestotrotz gab es bereits vor den p-adischen Zahlen bemerkenswerte Teilergebnisse.

Betrachten wir zunächst ternäre quadratische Formen (also $n = 3$). Wir gehen (wie oben) von einer von gemischten Termen bereinigten Form aus und die Unbekannten, die wir in diesem Falle ausnahmsweise mit X, Y, Z statt X_1, X_2, X_3 bezeichnen wollen, treten nur quadratisch auf. Ein erstes Kriterium zur Klärung der Isotropie quadratischer Formen entdeckte Legendre [80]: *Es seien a, b, c quadratfreie teilerfremde ganze Zahlen ungleich null. Dann besitzt*

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$$

genau dann eine nicht-triviale Lösung in ganzen Zahlen (also $\mathbf{0} \neq (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$), wenn a, b und c nicht alle dasselbe Vorzeichen besitzen und $-ab \bmod c, -bc \bmod a$ und $-ca \bmod b$ quadratische Reste sind.[48] Den Fall quadratischer Formen mit vier Variablen behandelte zuerst Adolf Meyer [92]. Die Charakterisierung isotroper quadratischer Formen beliebig vieler Veränderlicher wurde durch den jungen Hermann Minkowski [95] realisiert, angeregt durch eine von Hilbert und Hurwitz [67] aufgeworfene Frage zur Äquivalenz rationaler quadratischer Formen.[49]

Hermann Minkowski wurde 1864 in Alexotas, einem heutigen Stadtteil von Kaunas in Litauen geboren und starb unerwartet früh 1909 an einer Blinddarmentzündung in Göttingen. Er hatte bereits als Siebzehnjähriger mit seiner Arbeit (später veröffentlicht

[46] *isos* bedeutet im Griechischen 'gleich' und *tropos* steht für 'Richtung' bzw. 'Drehung'.

[47] welche tatsächlich auch in vielen p-adischen Beweisen eine Sonderrolle einnimmt und deshalb im Englischsprachigen auch ab und an als 'the oddest prime' bezeichnet wird

[48] Andre Weil schreibt in seiner Erläuterung der Legendreschen Studien zu quadratischen Formen: "Of Legendre's number theory it may fairly be said that there is often more scaffolding in it than solid masonry; even the foundations are at times so shaky that the visitor feels seldom quite safe, in spite of the the warning signs which Legendre does insert from time to time." [144], S. 327. Dessen ungeachtet räumt Weil obigem Resultat einen hohen Stellenwert ein.

[49] Tatsächlich ist Minkowskis Artikel der "Auszug aus einem von Herrn H. Minkowski in Bonn an Herrn Adolf Hurwitz gerichteten Briefe", so der Untertitel von [95] und mit einem Kommentar von Hurwitz versehen.

als [93]) zu Darstellungen von natürlichen Zahlen als Summe von fünf Quadraten für Aufsehen gesorgt und gemeinsam mit Henry J.S. Smith 1881 den Preis der Pariser Akademie erhalten. Kurioserweise war das gestellte Problem bereits 1868 von Smith gelöst worden, die Lösung aber anscheinend weitgehend unbemerkt geblieben. Minkowski eröffnete mit seinem Ansatz jedoch das Studium der Formen beliebig vieler Variabler. Während seines Studiums in Königsberg wurde David Hilbert sein Kommilitone und Freund und Adolf Hurwitz Lehrer und väterlicher Freund. Später begründete Minkowski die *Geometrie der Zahlen*, verfasste hierzu die einflussreiche Monographie [96], und spielte (wie auch Hilbert) eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der Relativitätstheorie. Minkowski hatte Professuren in Bonn, Königsberg, Zürich und Göttingen inne.

Minkowskis hinreichenden und notwendigen Kriterien zur Äquivalenz von 1890 sind spektakulär (und modulo dem Henselschen Lemma tatsächlich äquivalent zum nachstehenden Satz[50]), jedoch verklausuliert in Invarianten der quadratischen Form (Diskriminante, Geschlecht) und leider wenig praktikabel. Die befreiende Lösung und natürliche Formulierung gelang gut dreißig Jahre später mit Hilfe der p-adischen Zahlen durch Hensels Doktoranden Hasse.

ABBILDUNG 5. Von links nach rechts: Hermann Minkowski (1864-1909) und Helmut Hasse (1898-1979), die Analytiker quadratischer Formen, sowie Hasses Doktorand Heinrich-Wolfgang Leopoldt (1927-2011), von dem im Zusammenhang mit der p-adischen Zetafunktion noch die Rede sein wird.

Helmut Hasse wurde 1898 in Kassel geboren, diente nach seinem Notabitur 1915 als Freiwilliger im ersten Weltkrieg, studierte ab 1917 zunächst in Kiel, dann in Göttingen und schließlich ab 1920 bei Hensel in Marburg, war dessen Nachfolger, zuvor für kurze Zeit Privatdozent, wiederum in Kiel, dann Professor in Halle und später Professor in Göttingen, Berlin und Hamburg. Hasse verstarb 1979 in Ahrensburg bei Hamburg. Wie sein Doktorvater und entfernter Verwandter (über die Mendelssohns, cf. Yandell [148], S. 246) war Hasse lange Jahre Herausgeber des Crelle Journals. Seine nationale Einstellung und Kollaboration mit den Nazis wird unterschiedlich bewertet und wird im nächsten Paragraphen näher erörtert.

[50]Hierzu schreibt Ullrich [137]: "Minkowski's name comes into play here because already in 1890 he had found a result [...] that is equivalent to the above statement modulo , however, the — at least at that time — non-trivial 'Hensel's lemma"', S. 173. Tatsächlich zitiert Hasse Minkowskis Vorarbeiten nicht in [45], wohl aber in seiner Arbeit [46] zur Äquivalenz. Im Laufe der Zeit entwickelte sich die Namensgebung zu Gunsten der Nennung von Minkowski als Wegbereiter.

In seiner 1921 fertiggestellten Dissertation *Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen*[51] bewies Hasse den folgenden

Satz von Hasse–Minkowski. *Eine quadratische Form ist genau dann isotrop über $\mathbb{Q}$, wenn sie isotrop über allen $\mathbb{Q}_p$, $p \leq \infty$, ist.*

Beispielsweise liefert der Satz von Hasse-Minkowski angewandt auf die Formen $X_1^2+X_2^2+X_3^2-mX_4^2$ mit $m=n$ bzw. $n+1$ einen einfachen Beweis des Vierquadratesatzes von Lagrange, dass jede natürliche Zahl sich als Summe von vier Quadraten darstellen lässt.[52] Übrigens lässt sich jede p-adische Zahl als eine Summe von zwei Quadraten schreiben, wenn $p \equiv 1 \bmod 4$ ist; es sind drei Quadrate notwendig im Falle $p \equiv 3 \bmod 4$ und sogar vier im Falle $p=2$. Auf alle Fälle lässt sich -1 als Summe von Quadraten darstellen, womit $\mathbb{Q}_p$ nicht angeordnet ist. Eine ähnliche Anwendung des Satzes von Hasse-Minkowski mit $X_1^2+X_2^2+X_3^2-(8n+3)X_4^2$ liefert den tiefliegenden Gaußschen Satz von der Darstellung jeder natürlichen Zahl als Summe von höchstens drei Dreieckszahlen.[53]

Der Beweis des Satzes von Hasse-Minkowski benötigt Etliches an Theorie: aus der analytischen Zahlentheorie den Dirichletschen Primzahlsatz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen[54], aus der elementaren Zahlentheorie Hilberts verallgemeinerte Theorie der quadratischen Reste (inkl. dem so genannten Hilbert-Normrestsymbol anstelle des Legendre-Symbols) als Ersatz für die Minkowskischen Einheiten und natürlich eine genaue Analyse der multiplikativen Struktur von $\mathbb{Q}_p$ und seiner Untergruppe der Quadrate.[55] Insbesondere fällt vom Beweis folgender Spezialfall ab: *Im Falle einer ungeraden Primzahl p ist jede quadratische Form in mindestens drei Variablen mit mindestens drei Koeffizienten in $\mathbb{Z}_p^*$ isotrop über $\mathbb{Q}_p$.* Wir illustrieren diesen Sachverhalt und seinen Nutzen an einem Beispiel: Betrachten wir die Form $q(X,Y,Z)=3X^2-5Y^2-7Z^2$, so sind nur noch nicht-triviale Lösungen in $\mathbb{Q}_p$ für $p=2,3,5,7$ zu suchen. Beispielsweise lässt sich der Fall $p=3$ wie folgt behandeln: Aufgrund des Henselschen Lemmas (s.o.) ist $-\frac{7}{5} \in 1+3\mathbb{Z}_3$ ein Quadrat in $\mathbb{Q}_3$, also existiert eine 3-adische Zahl y mit $y^2=-\frac{7}{5}$ und entsprechend gilt $q(0,y,1)=3\cdot 0^2-5y^2-7\cdot 1^2=0$. Also nur auf den ersten Blick verschiebt (oder verschlimmert) der Satz von Hasse-Minkowski die Fragestellung zur Lösbarkeit einer gewissen quadratischen Gleichung in den lokalen Bereich (und derer

[51] veröffentlicht wurde diese Arbeit jedoch erst 1923 als [45] im von Hensel herausgegebenen Crelle Journal

[52] Der Vierquadratesatz von Lagrange offenbart, dass $X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2$ eine so genannte *universelle* quadratische Form ist, weil sie alle natürlichen Zahlen ausnahmslos darstellt. Das so genannte '290-Theorem' von dem jüngst mit einer Fields-Medaille geehrten Manjul Bhargava und Jonathan Hanke [8] besagt, dass eine positiv-wertige quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten, welche die 29 Zahlen $1,2,3,5,6,7,10,13,14,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,34,35,37,42,58,93,110,145,203,290$ darstellt, bereits alle natürlichen Zahlen darstellt! Dieses bemerkenswerte Ergebnis ist in einem gewissen Sinne bestmöglich, und es gibt insgesamt genau 6436 solche universellen quadratischen Formen in vier Veränderlichen. Diese Frage geht übrigens auf Srinivasan Ramanujan zurück.

[53] Die Dreieckszahlen lassen sich mit einem gleichseitigen Dreieck visualisieren (man denke an Billiard) und genügen also der Formel $\frac{1}{2}n(n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Diese Entdeckung vermerkte Gauß am 10. Juli 1796 in seinem mathematischen Tagebuch [39] mit dem Eintrag §18 " $**$ EYPHKA num $=\Delta+\Delta+\Delta$".

[54] In jeder primen Restklasse $a \bmod m$ existieren unendlich viele Primzahlen, wie Hasses entfernter Verwandter Dirichlet 1837 bewies.

[55] Einen Beweis findet sich bei Serre [125]; der einfache Fall ternärer quadratischer Formen wird etwa in Cassels [19] behandelt.

sogar unendlich viele), allerdings ist die Beantwortung zur lokalen Lösbarkeit letztlich nur für endlich viele Primzahlen p notwendig und dann jeweils einfach.

Die Entstehungsgeschichte des Satzes von Hasse-Minkowski ist interessant. Angeregt wurde Hasse zu seinem Beitrag zur Theorie der p-adischen Zahlen durch seinen Doktorvater, Kurt Hensel. Hasse zog es von Göttingen nach Marburg wegen Hensels 'Zahlentheorie' [61], welches er während seiner Zeit als Soldat im ersten Weltkrieg studiert hatte. Insbesondere interessierte Hasse sich für die *neuen* p-adischen Zahlen, welche 'in Göttingen als eine Kuriosität betrachtet wurden'[56]. Tatsächlich enthält Hensels zweite Monographie [61] im Gegensatz zu ihrem Vorgänger [60] ein ganzes Kapitel zu quadratischen Formen und insbesondere wird auch Legendres klassisches Resultat (s.o.) hergeleitet; auch spiegelt die Akzentuierung der quadratischen Formen Hensels Interesse an diesem Themenkreis wider. In diesem Zusammenhang dachte Hensel bereits an eine Auflösung der schwer verständlichen Minkowskischen Äquivalenz zur Isotropie durch die p-adischen Zahlen, aber über eine für die Lösbarkeit der zugrunde liegenden Gleichungen in p-adischen Zahlen hinreichende Bedingung hinaus ist nichts in seinen Werken zu finden. Als Hasse von seinen ersten Erfolgen (postalisch) berichtet, antwortet Hensel per Postkarte mit folgenden Worten:

> "Ich habe immer die Idee, daß da eine ganz bestimmte Frage zu Grunde liegt. Wenn ich von einer analytischen Funktion weiß, daß sie an allen Stellen rationalen Charakter hat, so ist sie rational. Wenn ich bei einer Zahl dasselbe weiß, daß sie für den Bereich jeder Primzahl p und für p_∞ p-adisch ist, so weiß ich noch nicht, ob sie eine rationale Zahl ist. Wie wäre das zu ergänzen?"[57]

Hierzu fährt Hasse [51] fort:

> "Es war die Frage am Schluß dieser Mitteilung, die mir die Augen geöffnet hat: Die Bedingungen des Lagrangeschen Satzes ließen sich ja dahingehend formulieren, *daß die ternäre Form für jede Primstelle p eine nicht-triviale p-adische Nulldarstellung zuläßt!* Und der Satz selbst besagt, daß sie dann auch eine nicht-triviale rationale Nulldarstellung zuläßt."[58]

Hasse schließt mit einem Dank an seinen verehrten Lehrer und väterlichen Freund Hensel.[59]

Interessant ist Hensels Gutachten der Arbeit seines Zöglings (siehe Abbildung 5); neben der lobenden Beschreibung des Inhaltes der Dissertation äußert sich Hensel auch zu weiteren, noch nicht klar umrissenen und ausgearbeiteten Möglichkeiten der neu gewonnenen Einsicht (siehe Abbildung 6). Und tatsächlich wendete Hasse seine Techniken noch im selben Jahr auf Zahlkörper [47] an. Eine noch umfassendere Theorie lieferte später

[56] Benjamin Yandell schreibt hierzu: "The p-adic numbers were regarded as a curiosity in Göttingen, but Hasse recognized their potential."; [148], S. 246.

[57] Hasse [51], S.4

[58] Tatsächlich ist hier Legendres Satz von oben gemeint; zur damaligen Zeit wurde dieses Resultat oft Lagrange zugeschrieben.

[59] und die Leser_in sei aufgefordert, selbst Hasses weitere Kommentare zu dieser unpräzise formulierten, aber folgenschweren Frage Hensels zu lesen. Cassels schrieb hierzu "In the early 1920's, at the very commencent of his career, Hasse, inspired by a truly delphic postcard from Hensel formulated the "local-global principle" (...)", [19], S. vi.

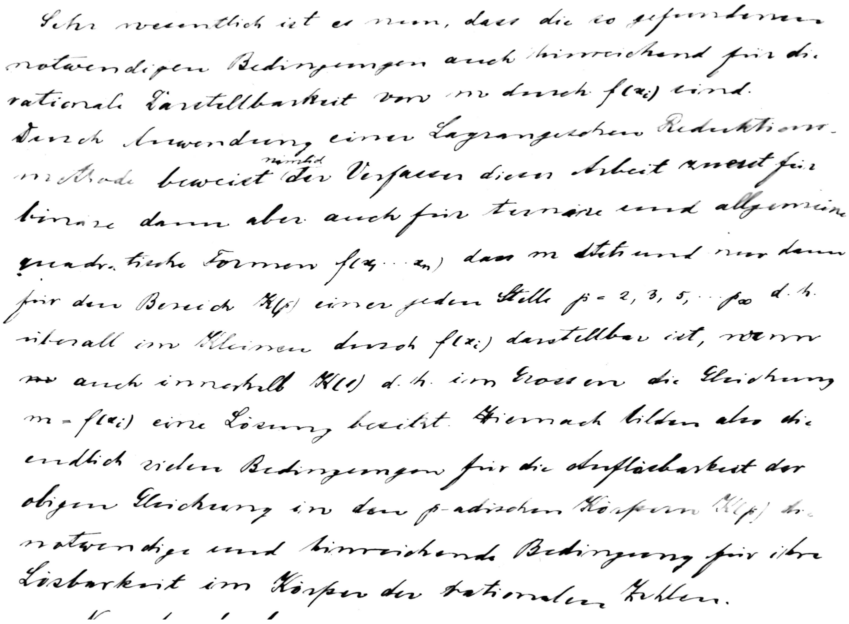
Sehr wesentlich ist es nun, dass die so gefundenen
notwendigen Bedingungen auch hinreichend für die
rationale Darstellbarkeit von m durch $f(x_i)$ sind.
Durch Anwendung einer Lagrangeschen Reduktions-
methode beweist nämlich der Verfasser dieser Arbeit zuerst für
binäre dann aber auch für ternäre und allgemeine
quadratische Formen $f(x_1 \cdots x_n)$ dass m stets und nur dann
für den Bereich $K(p)$ einer jeden Stelle $p = 2, 3, 5, \cdots p_\infty$ d.h.
überall im Kleinen durch $f(x_i)$ darstellbar ist, wenn
sie auch innerhalb $K(1)$ d.h. im Grossen die Gleichung
$m = f(x_i)$ eine Lösung besitzt. Hiernach bilden also die
endlich vielen Bedingungen für die Auflösbarkeit der
obigen Gleichung in den p-adischen Körpern $K(p)$ die
notwendige und hinreichende Bedingung für ihre
Lösbarkeit im Körper der rationalen Zahlen.

ABBILDUNG 6. "Sehr wesentlich ist es nun, dass die so gefundenen notwendigen Bedingungen auch hinreichend für die rationale Darstellbarkeit von m durch $f(x_i)$ sind. Durch Anwendung einer Lagrangeschen Reduktionsmethode beweist nämlich der Verfasser dieser Arbeit zuerst für binäre dann aber auch für ternäre und allgemeine quadratische Formen $f(x_1, \ldots, x_n)$ dass m stets und nur dann für den Bereich $K(p)$ einer jeden Stelle $p = 2, 3, 5, \ldots p_\infty$ d.h. überall im Kleinen durch $f(x_i)$ darstellbar ist, wenn sie auch innerhalb $K(1)$ d.h. im Großen die Gleichung $m = f(x_i)$ eine Lösung besitzt. Hiernach bilden also die endlich vielen Bedingungen für die Auflösbarkeit der obigen Gleichung in den p-adischen Körpern $K(p)$ die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Lösbarkeit im Körper der rationalen Zahlen." Auszug aus Hensels Gutachten der Hasseschen Dissertation, erstellt am 30. März 1921; mit p_∞ ist das Verhalten bzgl. der archimedischen Vervollständigung gemeint, und $K(1)$ steht für den rationalen Grundkörper.

Hasses Assistent Ernst Witt im Rahmen seiner Habilitation [147]. Sein Zugang ist geometrischer Natur und quadratische Formen werden als Funktionen auf Moduln betrachtet; siehe hierzu auch Kneser [72].[60] Darüber hinaus behandelte Hasse die Äquivalenz quadratischer Formen in den Arbeiten [45, 46] (welche im Wesentlichen seine Habilitationsschrift widerspiegeln). Auch hier gilt eine Korrespondenz zwischen dem rationalen Fall und den p-adischen Fällen. Hasse selbst (wie auch Hensel) spricht zu diesem Zeitpunkt von einem Prinzip *vom Kleinen zum Großen*. Heutzutage bezeichnet man Zahlkörper wie $\mathbb{Q}$ (aber auch endliche algebraische Erweiterungen) als *global* und nennt Vervollständigungen derselben *lokal*, wie etwa die p-adischen Körper $\mathbb{Q}_p$ (aber auch Restklassenkörper) und $\mathbb{R}$. Auf den Hasseschen Arbeiten aufbauend besagt das

[60]Witt war seit 1933 Mitglied der NSDAP und darüber hinaus auch bei der SA. Neben Witt war Oswald Teichmüller nicht nur Teilnehmer in Hasses Seminar zu p-adischen Zahlen, sondern auch bekennender Nazi; siehe Hauser et al. [54].

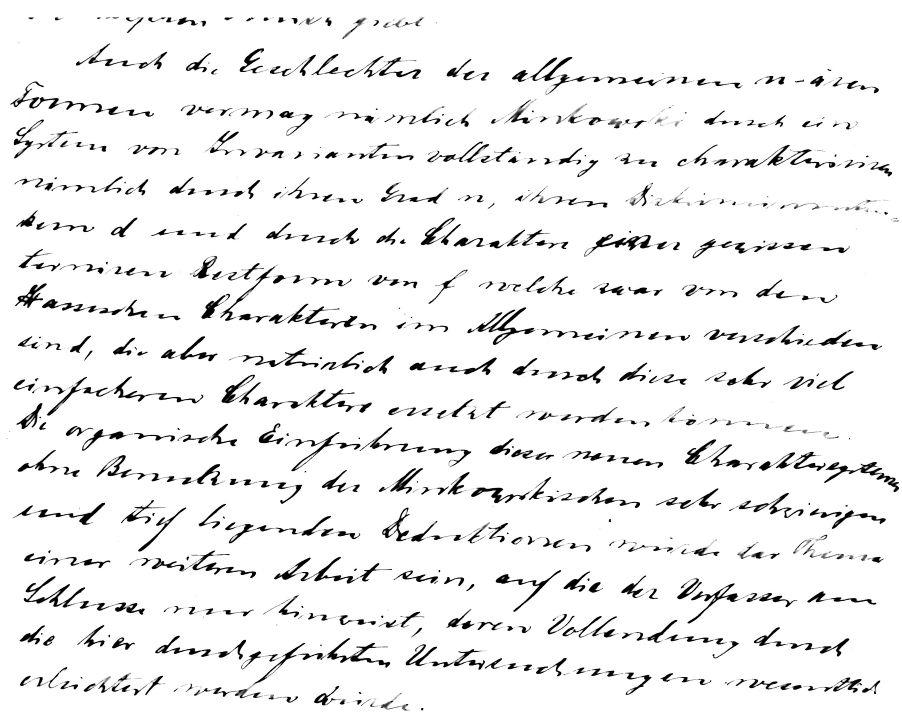
Auch die Geschlechter der allgemeinen n-ären Formen vermag nämlich Minkowski durch ein System von Invarianten vollständig zu charakterisieren nämlich durch ihren Grad n, ihren Diskriminanten-kern d und durch die Charaktere einer gewissen ternären Restform von f welche zwar von den Hasseschen Charakteren im Allgemeinen verschieden sind, die aber natürlich auch durch diese sehr viel einfacheren Charaktere ersetzt werden können. Die organische Einführung dieser neuen Charaktersysteme ohne Benutzung der Minkowskischen sehr schwierigen und tief liegenden Deduktionen würde das Thema einer weiteren Arbeit sein, auf die der Verfasser am Schluss nur hinweist, deren Vollendung durch die hier durchgeführten Untersuchungen wesentlich erleichtert werden würde.

ABBILDUNG 7. "Auch die Geschlechter der allgemeinen n-ären Formen vermag nämlich Minkowski durch ein System von Invarianten vollständig charakterisieren nämlich durch ihren Grad n, ihren Diskriminantenkern d und durch die Charaktere einer gewissen ternären Restform von f welche zwar von den Hasseschen Charakteren im Allgemeinen verschieden sind, die aber natürlich auch durch diese sehr viel einfacheren Charaktere ersetzt werden können. Die organische Einführung dieser neuen Charaktersysteme ohne Benutzung der Minkowskischen sehr schwierigen und tief liegenden Deduktionen würde das Thema einer neuen Arbeit sein, auf die der Verfasser zum Schluss nur hinweist, deren Vollendung durch die hier durchgeführten Untersuchungen wesentlich erleichtert werden würde." Auszug aus Hensels Gutachten der Hasseschen Dissertation, erstellt am 30. März 1921.

Lokal–Global-Prinzip:[61] *Nutze lokale Informationen zu einem arithmetischen Objekt (in den lokalen Körpern $\mathbb{Q}_p, p \leq \infty$), um globale Informationen zu erzielen (in $\mathbb{Q}$).*

Ein weiteres frühes Beispiel neben dem Satz von Hasse-Minkowski für einen solchen Zusammenhang ist ein Resultat von Gustav Rados [111] von 1922, welches besagt, dass ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten genau dann in Linearfaktoren über $\mathbb{Q}$ zerfällt, wenn selbiges gilt für seine Reduktionen modulo sämtlichen Primzahlen.[62] Hingegen war die Idee der Dichotomie zwischen dem Kleinen und Großen bzw. dem Lokalen und Globalen in dieser Zeit durchaus en vogue, wie etwa Renaud Chorlay [22] beschreibt; allerdings war diese Begriffsbildung zuvor keinen arithmetischen Fragestellungen vorbehalten. Tatsächlich benutzte bereits William Osgood seit 1898 "im kleinen" und "im

[61]in einiger Literatur auch 'Hasse-Prinzip'

[62]Hingegen hatte Hilbert mit dem über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Polynom X^4+13X^2+81 ein Beispiel gegeben, dass die Reduzibilität modulo sämtlichen Primzahlpotenzen nicht vererbt wird; siehe auch Narkiewicz [100].

grossen" in seinen Veröffentlichungen und Hermann Weyl schrieb 1912 ganz im Henselschen Sinne: "Es ist natürlich und innerlich konsequent, wenn dabei die Riemannschen Ideenbildungen, ja selbst das mit ihnen im engem sachlichen Zusammenhang stehende Weierstraßsche Princip der analytischen Fortsetzung von der Darstellung ausgeschlossen bleiben und die Betrachtungen sich auf das Verhalten der Funktionen "im Kleinen" (d.h. im jeweiligen Gültigkeitsbereich der zugrunde gelegten Reihenentwicklungen oder dgl.) beschränken." [145] (siehe auch Chorlay [22]).

Das Lokal–Global-Prinzip ist ein erstaunlich starkes Instrument. Wie auch Cassels bemerkt[63], mussten einige Jahre ins Land gehen, bevor die Mathematiktreibenden das von Hasse entdeckten Lokal-Global-Prinzip sich zu eigen machten und dessen Tiefe und Potential sich in zahlreichen Publikationen niederschlug. Zunächst wurden die Grenzen des Lokal–Global-Prinzips aufgezeigt. Mit ähnlicher Argumentation wie oben zeigt sich beispielweise, dass die Gleichung

$$(X^2 - 2)(X^2 + 7)(X^2 + 14) = 0$$

Lösungen in sämtlichen lokalen Körpern $\mathbb{Q}_p$, $p \leq \infty$ besitzt,[64] jedoch offensichtlich keine in $\mathbb{Q}$. Auch für Formen höheren Grades besteht i.A. kein Analogon. Ernst Selmer [124] untersuchte kubische Formen und fand mit u.a. $3X^3 + 4Y^3 - 5Z^3$ ein einfaches Beispiel einer kubischen Form, die dem Lokal-Global-Prinzip nicht gehorcht; lokal stellt diese Form stets die Null nicht-trivial dar, aber es existiert keine nicht-triviale globale Darstellung.[65] Hingegen bewies Bryan Birch [10], dass jede Form ungeraden Grades mit im Vergleich zum Grad hinreichend vielen Variablen isotrop ist. Eine Vermutung von Emil Artin [3][66] besagt, dass stets Isotropie vorliegt, wenn die Anzahl der Variablen das Quadrat des Grades übersteigt. Während dies zutrifft auf die Fälle quadratischer und kubischer Formen, zeigte Guy Terjanian [134] im Falle biquadratischer Formen die Ungültigkeit dieser Vermutung; allerdings zeigten James Ax und Simon Kochen [4] mit einem modelltheoretischen Argument, dass für hinreichend große d und fast alle Primzahlen p (abhängig von d) jedes homogene p-adische Polynom vom Grad d eine nicht-triviale Nullstelle besitzt.

Einen Spezialfall illustriert das von Edward Waring 1770 aufgestellte und nach ihm benannte Waringsche Problem: *Zu jeder natürlichen Zahl k existiert eine natürliche Zahl $g(k)$, so dass jede natürliche Zahl n sich darstellen lässt als Summe von $g(k)$ vielen k-ten Potenzen* [140]; er behauptete darüber hinaus, daß "jede Zahl dargestellt werden kann als Summe von vier Quadraten, neun Kuben, neunzehn Biquadraten"[67]. Im Fall $k = 2$ genügen nach dem klassischen Lagrangeschen Satz vier Summanden, also $g(2) = 4$, im Falle von Kuben ist $g(3) = 9$, was zuerst Arthur Wieferich [146] und — eine Lücke desselben schließend — Aubrey John Kempner [71] zeigten, und $g(4) = 19$ nach R. Balasubramanian [5] sowie Jean-Marc Deshouillers und François Dress [29]. Der allgemeine

[63]"His [Hasse's] formulation succinctly subsumes a mass of earlier results, often with quite complicated enunciations. Nevertheless, the merits of this approach took a long time to percolate into the collective mathematical consciousness." [19], S. vi

[64]hierfür erinnere man sich der Charakterisierung der p-adischen Quadrate, des Henselschen Lemmas und der klassischen Theorie der quadratischen Reste; dieses Beispiel geht auf Thoralf Skolem [129] zurück.

[65]Ferner wies Selmer für die Form $aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dW^3$ das Lokal-Global-Prinzip nach im Falle nicht verschwindender Koeffizienten mit $ad = bc$.

[66]wohl nie von Artin selbst als solche publiziert; siehe das von Serge Lang und John Tate verfasste Vorwort in seinen gesammelten Artikeln [3].

[67]cf. Schmidt [121], S. 1

Fall wurde von Hilbert [66] bewiesen[68]. Es bezeichne $R(m,k,n)$ die Anzahl der Lösungen $(x_1,\dots,x_n)$ der Gleichung

$$m = X_1^k + \ldots + X_n^k$$

mit $x_j \geq 0$. In den 1920ern entwickelten Godfrey Hardy und John Littlewood die Kreismethode und mit dieser komplex-analytischen Integration gewannen sie [44] für $n > 2^k$ die asymptotische Formel

$$R(m,k,n) = m^{\frac{n}{k}-1}\frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^n}{\Gamma(\frac{n}{k})}\mathfrak{S}(m) + O(m^{\frac{n}{k}-1-\delta})$$

mit einem positiven δ, wobei $\Gamma(x)$ die Gamma-Funktion ist[69] und die so genannte *singuläre Reihe* $\mathfrak{S}(m)$ gegeben ist als das Euler-Produkt

$$\mathfrak{S}(m) = \prod_p \delta_p\ , \quad \text{wobei} \qquad \delta_p := 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\big(\omega(p^j) - \omega(p^{j-1})\big)$$

und $\omega(d)$ gleich dem Produkt von d^{1-n} mit der Anzahl der Lösungen der Kongruenz $X_1^k + \ldots + X_n^k \equiv 0 \bmod d$ ist. In Anbetracht von $\delta_p = \lim_{j\to\infty}\omega(p^j)$ stehen die Größen δ_p für die jeweiligen Dichten der p-adischen Lösungen der Gleichung $X_1^k + \ldots + X_n^k = 0$. Insofern steht die singuläre Reihe für dem diophantischen Problem entsprechende Restklassenbedingungen; beispielsweise sind die Quadrate ganzer Zahlen $\equiv 0, 1 \bmod 4$ und keine natürliche Zahl $m \equiv 3 \bmod 4$ ist somit Summe von zwei Quadraten. Der Quotient der Gamma-Faktoren wird als Beitrag der *Stelle im Unendlichen* $p = \infty$ interpretiert. Der Fehlerterm $= (m^{\frac{n}{k}-1-\delta})$ fällt im Vergleich mit dem Hauptterm verhältnismäßig klein aus, weshalb für hinreichend große m eine Darstellung als Summe von n vielen k-ten Potenzen besteht. Für die Anzahl der notwendigen Summanden $g(k)$ gilt $g(k) \geq \lfloor(3/2)^k\rfloor + 2^k - 2$ und Gleichheit wird vermutet; die Ungleichung folgt aus der Darstellung von $(\lfloor(3/2)^k\rfloor - 1)2^k + 2^k - 1$ als Summe von $\lfloor(3/2)^k\rfloor - 1$ Summanden 2^k und von $2^k - 1$ Summanden 1^k, wobei $\lfloor x\rfloor$ für die größte ganze Zahl $\leq x$ steht. Einen Überblick über den Kenntnisstand und weitere Beispiele für die Einsatzbereitschaft der Kreismethode und p-adischer Größen in damit verwandten asymptotischen Entwicklungen liefern Wolfgang Schmidt [121] für mittlerweile klassische Fragestellungen und Timothy Browning [16] mit Blick auf diophantische Fragestellungen bei projektiven Varietäten und die Vermutung von Yuri Manin.

Auch das Analogon des Satzes von Hasse-Minkowski für ganze Zahlen bzw. ganze p-adische Zahlen ist i.A. nicht richtig, ein komplizierterer Sachverhalt im Geiste des Lokal-Global-Prinzips ist jedoch richtig und wurde 1935 von Carl Ludwig Siegel [127] bewiesen; auch hier spielen Vorarbeiten von Minkowski [95] eine wesentliche Rolle, weshalb ihm zu Ehren dieses Resultat auch als Satz von Minkowski und Siegel bekannt ist.[70] Im weiteren Kontext sind hier unbedingt auch Beiträge (inkl. neuen Methoden) zur Verteilung von Gitterpunkten auf Ellipsoiden von Yuri Linnik [83] sowie William Duke und Rainer Schulze-Pillot [30] zu nennen. Ebenfalls in den 1930ern entwickelten Thoralf Skolem [128]

---

[68] auf Vorarbeiten seines Lehrers Hurwitz [69] aufbauend; diese Leistung wird von Nicola Oswald [105] als Emanzipation des Schülers Hilbert von seinem Lehrer Hurwitz gewürdigt.

[69] für positive x definiert durch das Integral $\int_0^\infty t^{x-1}\exp(-t)\mathrm{t}$

[70] mehr dazu bei Kneser [72]

und Kurt Mahler [87] mit ihren p-adischen Methoden, diophantische Fragestellungen wie etwa die nicht-triviale rationale Lösbarkeit von Gleichungen wie beispielsweise

$$X^5 + 2Y^5 + 4Z^5 - 10X^2YZ^2 = \pm 1$$

anzugehen; mehr hierzu u.a. bei Cassels [19] und Mordell [97]. Bereits 1929/30 bewies Mahler [86] die Transzendenz der p-adischen Thue-Morse–Reihe (2). Und ganz im Trend der Zeit griff Mahler [88] 1934/35 darüber hinaus die Lösung des siebten Hilbertschen Problems[71] zur Transzendenz von α^β bei algebraischen β und $\alpha \neq 0, 1$ durch Alexander Gelfond und (unabhängig) Theodor Schneider auf und bewies ein p-adisches Analogon des Gelfondschen Transzendenzbeweises. Auch weitere bahnbrechende Resultate der diophantischen Analysis fanden ihre p-adischen Analoga. D. Ridout [115] bewies das p-adische Äquivalent des Satzes von Thue-Siegel-Roth zur Approximation algebraischer Zahlen[72] und Hans Peter Schlickewei [120] gelang der Nachweis des p-adischen Teilraumsatzes, den Arbeiten Wolfgang M. Schmidts folgend.[73]

Hensels ursprünglicher Wunsch der Begründung einer algebraischen Zahlentheorie auf p-adischer Basis (neben seinen Transzendenzuntersuchungen) wurde im Rahmen der Ausarbeitung und Vereinfachung der Klassenkörpertheorie ebenfalls im Laufe der 1930er realisiert. Die wesentlichen Arbeiten hierzu leistete Claude Chevalley[74] mit u.a. seiner Einführung [21] der Adéle und Idéle[75] (wie auch Weil [143] dokumentiert). Insbesondere sei hier das p-adische Analogon des Satzes von Kronecker-Weber genannt, wonach jede abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ (also eine endliche algebraische Erweiterung mit abelscher Galois-Gruppe) in einem Kreisteilungskörper enthalten ist; tatsächlich impliziert das (lokale) p-adische Analogon hier auch das (globale) klassische Resultat.[76] Weitere Folgerungen ergaben sich mit der Zeit. So begründete Hasse in Zusammenarbeit mit Emmy Noether und Richard Brauer die Strukturtheorie normal einfacher Algebren über Zahlkörpern. Einen Abriss über Konsequenzen des Lokal-Global-Prinzips für die algebraische Geometrie liefert Barry Mazur [90].

7. Die Nazizeit

> "Die Dichter und die Denker / Holt in Deutschland der Henker. /
> Scheinen Mond und Sterne nicht / Ist die Kerze das einzige Licht."
> (Bert Brecht, aus dem Gedicht 'Alfabet' von 1934)

Mit der Machtergreifung 1933 hatte die Nationalsozialistische Deutsche Arbeiterpartei (NSDAP) die politische Kontrolle in der Weimarer Republik übernommen. Dies hatte unmittelbar nicht nur extreme Auswirkungen auf die Gesellschaft, auch die Wissenschaft

[71]Hilbert hatte dieses Problem gegenüber der Fermatschen Vermutung und der Riemannschen Vermutung gegenüber als das schwierigste eingestuft.

[72]für die Klaus Friedrich Roth 1958 auf dem ICM in Edinburgh mit der Fields-Medaille geehrt wurde

[73]siehe Hindry und Silverman [68] für eine moderne Einführung in diese Resultate

[74]der zuerst bei Hasse in Marburg studierte und später in Paris und Princeton forschte und u.a. jüngstes Mitglied bei Bourbaki wurde

[75]Der Begriff *Idéle* leitet sich aus 'ideales Element' ab, was zunächst mit 'id.el.' abgekürzt wurde; cf. Neukirch [102], S. 129.

[76]für Details sei wiederum auf Cassels [19], §8.4 & 10.12 verwiesen

in Deutschland wurde in kürzester Zeit in Mitleidenschaft gezogen. Jüdische oder andersdenkende Mathematiker_innen wurden aus ihren Anstellungen gerissen, während nationalsozialistisch Gesinnte und Mitläufer in frei werdende Ämter drängten, neue Machtstrukturen aufbauten und erheblichen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik selbst nahmen. Die Lebensläufe der Protagonisten der p-adischen Zahlen liefern traurige Beispiele.

Die Professorenschaft an den deutschen Universitäten zu Zeiten der Weimarer Republik kann einerseits als weitgehend deutschnational und teilweise antisemitisch beschrieben werden, war dabei aber oftmals auch erstaunlich unpolitisch und der Demokratie nicht sonderlich aufgeschlossen; wesentliche Einflüsse hierfür war der verlorene erste Weltkrieg (an dem etliche als Soldaten aktiv beteiligt waren), die wirtschaftliche Instabilität und die demokratischen Wirren der jungen Weimarer Republik (siehe auch Segal [123], Chapter 3). Kurt Hensel war deutschnationaler Gesinnung, brachte allerdings den Nazis keinerlei Begeisterung entgegen. Tatsächlich entstammte Hensel einer wohlsituierten evangelischen, ursprünglich allerdings jüdischen Familie mit vielen Künstlern_innen (die Verbindung zu den Mendelssohns wurde schon erwähnt). Hensels Frau Gertrud (geborene Hahn) kam aus einer jüdischen Industriellenfamilie. Vor der Hochzeit ließ sich Gertrud taufen, eine in dieser antisemitischen Zeit weitverbreitete Handlung im Rahmen der Assimilierung weiter Teile der jüdischen Bevölkerung.[77] Im Jahr 1929 wurde Hensel ordnungsgemäß emeritiert und sein ehemaliger Schüler Hasse wurde als Nachfolger berufen.

Dieser hatte sich glänzend entwickelt dank seiner Arbeiten zu quadratischen Formen; während kurzer Aufenthalte in Kiel und Halle hatte er in engem Kontakt mit den Hamburger Zahlentheoretikern, wie z.B. Emil Artin und Erich Hecke, die Klassenkörpertheorie weiter ausgebaut sowie einfache Algebren studiert. Diese letztgenannten Untersuchungen führte er in Marburg fort, nun in regem Kontakt mit Emmy Noether in Göttingen und Richard Brauer in Königsberg. In dieser Hinsicht kann Hasse im Gegensatz zu seinem Lehrer Hensel als ein vielseitiger Mathematiker mit Teamgeist charakterisiert werden. Mit der Machtergreifung der Nazis am 30. Januar 1933 und der unmittelbar nachfolgenden Politisierung der Universitäten ergaben sich für Hasse weitere Optionen, die ihn aus der hessischen Provinz ins mathematische Zentrum bringen sollten.

Mit dem *Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums* vom 7. April 1933 wurden jüdische oder andersdenkende Hochschullehrer_innen ihrer Ämter enthoben. Am Mathematischen Institut in Göttingen, zu dieser Zeit immer noch das Aushängeschild mathematischer Fakultäten in Deutschland, sah sich beispielsweise der jüdische Zahlentheoretiker Edmund Landau (1877-1938) extremen Anfeindungen durch nationalsozialistische Studenten, angeführt von Oswald Teichmüller und Werner Weber, ausgesetzt und wurde Ende April beurlaubt; der Institutsleiter und Jude Richard Courant (1888-1972) teilte sein Schicksal und auch der Nichtjude Hermann Weyl (1885-1955) kehrte (wohl wegen seiner jüdischen Frau) Göttingen den Rücken.[78] Es begann ein undurchsichtiges Ränkespiel, die freigewordenen Professuren wieder zu besetzen. Zum 2. Juli 1934 erhielt Hasse

[77] Ganz ähnlich h atte sich die Familie Mendelssohn verhalten. Übrigens war Hensel selbst (zumindest in späten Jahren) Atheist (cf. Petri [108], S. 16).

[78] Tatsächlich wären hier weitere Menschen und ihre Schicksale anzuführen, jedoch sei hier auf Schappacher [118] verwiesen.

die Professur des emigrierten Weyl und Erhard Tornier (1894-1982) folgte dem beurlaubten Landau; gemeinsam übernahmen sie die Leitung des Mathematischen Institutes.

Auch Tornier war ein Schüler Hensels; er hatte zeitgleich mit Hasse in Marburg studiert und ebenfalls 1922 mit einer (unveröffentlichten) Arbeit zu p-adischen Zahlen bei Hensel promoviert. Anschließend war Tornier für kurze Zeit Hasses Assistent in Halle; hierbei entstand sogar eine gemeinsame Arbeit [53] zur algebraischen Zahlentheorie. Mit den späteren Veröffentlichungen setzte bei Tornier ein Interessenwandel zu Fragen der Wahrscheinlichkeitstheorie ein. Um in diesem Gebiet Fuß zu fassen, baute er auf alte Verbindungen und bat einen weiteren Henselschen Doktoranden, Adolf Abraham Fraenkel (1891-1965), um Hilfe.


Abbildung 8. Links Abraham Fraenkel, rechts die Villa der Familie Hensel, in der Fraenkel mit Familie kurz nach Ende des ersten Weltkriegs wohnte. Heute ist in dem Gebäude im Gisonenweg nahe des Marburger Landgrafenschlosses das Herder-Institut für historische Ostmitteleuropaforschung zuhause.

Fraenkel hatte bereits 1914 bei Hensel promoviert, er wurde zwei Jahre später habilitiert und schließlich 1922 nichtbeamteter außerordentlicher Professor in Marburg; ab 1928 war Fraenkel Professor in Kiel mit einer zweijährigen Unterbrechung für eine Lehrtätigkeit an der neugegründeten Hebrew University of Jerusalem. Nach seiner Rückkehr wurde Fraenkel Opfer der Nazipolitik in Gestalt seines Bekannten Tornier. Dank Fraenkels Fürsprache erhielt Tornier zunächst eine Stelle in Kiel bei dem vielversprechenden, kroatischen Wahrscheinlichkeitstheoretiker Vilim (William) Feller (1906-1970). Tornier war seit 1932 Mitglied der NSDAP und wußte dies auszunutzen. Mit dem Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums im Rücken denunzierte Tornier den Juden Feller, der daraufhin emigrierte, zuerst nach Skandinavien, wo Feller seine Arbeiten zum zentralen Grenzwertsatz verfasste, welche ihn zu einem der wichtigsten Wahrscheinlichkeitstheoretiker seiner Zeit machten, später lebte und wirkte er in den U.S.A., wie so viele europäische Wissenschaftler_innen im Zuge der Drangsalierungen der Nazis. Tornier hingegen machte weiter Karriere im 'Dritten Reich'. Zuerst meldete Tornier Ansprüche auf Fraenkels Lehrstuhl an, wenngleich erfolglos. Trotzdem wurde Fraenkel seiner jüdischen Religionszugehörigkeit wegen beurlaubt, verließ umgehend Kiel und kehrte an die Universität in Jerusalem zurück, deren Rektor er in der Zeit von 1938 bis 1940 war.

Fraenkel war letztlich der Logik verschrieben, wie bereits seine während der Promotionszeit 1912 verfasste, axiomatische Begründung der p-adischen Zahlen [33] erkennen ließ. Mit seinen Arbeiten um 1920 herum, also während seiner Marburger Zeit, studierte Fraenkel das Auswahlaxiom von Ernst Zermelo, welches ein wesentlicher Streitpunkt in den Diskussionen zum Wesen der Mathematik Anfang des 20. Jahrhunderts war, und begründete daraus hervorgehend die heute für viele Bereiche der Mathematik grundlegende Zermelo-Fraenkel–Mengenlehre (oftmals mit ZF abgekürzt). Seine Ausarbeitung *Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen* [34] ist Hensel zu dessen sechzigstem Geburtstag gewidmet. Insbesondere vor dem Hintergrund, dass Hensel ein Schüler des Konstruktivisten Kroneckers war und Zeit seines Lebens und Schaffens eine allzu strikte Position in der Debatte über die Grundlagen der Mathematik vermied, ist diese Widmung einer Arbeit im Geiste Cantors äußerst bemerkenswert und zeugt von einem Anfang der 1920er Jahre letztlich von der mathematisch-philosophischen Grundlagendiskussion befreiten Hensel.

Anfang 1934 galt es, die vakanten Professuren am Mathematischen Institut in Göttingen zu füllen. Gesucht wurden anerkannte Mathematiker, die zudem politisch hinreichend konform waren, den wissenschaftlichen Betrieb am Laufen zu halten und dabei auch im Geiste der neuen Ideologie repräsentativ waren. Insbesondere wurde Helmut Hasse genannt. Seine politische Einstellung spiegelt folgendes Zitat aus einem Interview mit Constanze Reid [112], S. 250/251, wider:

> "My political feelings have never been Nationalsocialistic but rather 'national' in the sense of the Deutschenationale Partei, which succeeded the Conservative Party of the Second Empire [under Wilhelm II]. I had strong feelings for Germany as it was created by Bismarck in 1871. When this was heavily damaged by the Treaty of Versailles in 1919, I resented that very much. I approved with all my heart and soul of Hitler's endeavors to remove the injustices done to Germany in that treaty. It was from this truly national standpoint that I reacted when the Faculty [at the first meeting after the war's end] more or less suggested that such a view was not permissible in one of its members."

Im Jahr 1929 war Hasse der Deutschnationalen Volkspartei (DNVP) beigetreten (siehe Zitat). Auf Grund der Kooperation mit der NSDAP und deren Wahlerfolgen verlor die DNVP rasant an Bedeutung und löste sich im Juni 1933 auf; die Reichstagsabgeordneten der DNVP schlossen sich der NSDAP-Fraktion an. Hasse selbst stellte 1937 einen Antrag der NSDAP beizutreten. Angesichts einer Welle von Anfragen zur Aufnahme in die NSDAP Anfang 1933 hatte die Parteispitze zum 1. Mai bis auf weiteres eine Aufnahmesperre für neue Mitglieder verhängt, so dass keine Neuanmeldungen (mit Ausnahme von Angehörigen der 'Hitler Jugend', der 'Nationalsozialistische Betriebszellenorganisation' und weiterer Naziverbünde) mehr möglich waren; 1937 erfolgten Lockerungen und Sonderregelungen zu dieser Sperre, vollkommen aufgehoben wurde sie erst 1939.[79] Hintergrund für die Aufnahmesperre war die Angst der Parteiführung, zahlreiche Mitläufer ohne wirkliche Sympathien anzuziehen und politischen Gegnern Sabotage von innen zu ermöglichen. Hasses Parteibeitritt verhinderte wohl eine jüdische Großmutter in seiner Ahnenreihe; es erfolgte eine Registrierung als Parteianwärter, aber eine endgültige Aufnahme in die Partei erfolgte nicht. Nach dem Krieg veranlasste die britische Militärregierung die vorläufige

[79] Ende 1939 zählte die NSDAP mehr als fünf Millionen Mitglieder; nach der Volkszählung vom Mai 1939 lebten ca. 80 Millionen Menschen im 'Deutschen Reich'.

Entlassung Hasses aus dem Staatsdienst; 1948 wurde Hasse im Rahmen der Entnazifizierung schließlich entlastet (womöglich dank der Unterstützung zahlreicher Kollegen) und nahm im Folgenden Professuren in zunächst Berlin und schließlich Hamburg an.

Zunächst schien Hasse jedoch die optimale Lösung für Göttingen zu sein, die dort entstandenen Lücken im neuen Geiste zu füllen. Seine Göttinger Kollegen Weyl und Courant sahen ihn als "a political conservative and a first-class mathematician" bzw. "the sort of person who might be acceptable to the Nazi régime and expected to uphold the Göttingen mathematical tradition."[80] Auch den politischen Machthabern schien Hasse ein akzeptabler Kandidat. Wie viele seiner Kollegen unterzeichnete Hasse am 11. November 1933 das *Bekenntnis der Professoren an den deutschen Universitäten und Hochschulen zu Adolf Hitler und dem nationalsozialistischen Staat.* Hatte das Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums die Lehrfreiheit an den Universitäten abgeschafft, so wurde mit dem Bekenntnis der Versuch unternommen, Stimmung für die anstehenden Reichstagswahlen zu machen (bei der bereits nur NSDAP-Kandidaten zu wählen waren) und die Selbstbestimmung der Universitäten weiter einzuschränken und letztlich das Führerprinzip an den Hochschulen einzuführen.

Hasses Position während der Nazizeit ist schwer verständlich. In kürzester Zeit gerieten er und sein früherer Kommilitone Tornier in Leitungsfragen des Institutes aneinander. Sicherlich stand für Hasse das mathematische Talent über der politischen Gesinnung. So setze sich Hasse beispielsweise vehement für Emmy Noether ein (siehe hierzu etwa Schappacher [118] und Segal [123]), was letztlich jedoch nichts an ihrer Emigration in die U.S.A. änderte. Andererseits machte sich Hasse nicht nur mit sozialem Engagement und Forschungsergebnissen einen Namen, sondern auch mit hochschul- und wissenschaftspolitischen Aktivitäten, z.B. bei der *Deutschen Mathematiker Vereinigung* (DMV). Für diese fungierte er seit 1932 als deren Schatzmeister. Eine weitere zentrale Rolle bei der DMV spielte der Schriftführer Ludwig Bieberbach (1886-1982). Dieser renommierte Funktionentheoretiker war ein überzeugter Nationalsozialist. Er versuchte seinen propagierten Standpunkt der 'Deutschen Mathematik' an den Universitäten, in den Journalen und in der DMV zu verankern. Beispielsweise startete Bieberbach auf der Jahrestagung im September 1934 in Bad Pyrmont den Versuch, innerhalb der DMV das Führerprinzip mit Tornier an der Spitze einzusetzen, scheiterte jedoch am Widerspruch von u.a. Hasse und Wilhelm Blaschke; Letztgenannter wurde als Vorsitzender eines modifizierten Führerprinzips gewählt (vgl. Remmert [113]).

Einige abschließende Worte zur Situation in Marburg. 1934 übernahm der Geometer und Topologe Kurt Reidemeister (1893-1971) Hasses Lehrstuhl in Marburg, der ja nach Göttingen berufen worden war. Reidemeister selbst hatte zuvor eine Professur in Königsberg inne, war aber im Zuge der Machtergreifung der Nazis und den sich daraus ergebenden Umbrüchen vor Ort von seinem Amte enthoben worden; angesichts von Kundgebungen des nationalsozialistischen Studentenbundes in Königsberg "verwendete er eine ganze Vorlesungsstunde darauf, im einzelnen darzulegen, wie unakademisch und unzivilisiert das Verhalten dieser Studentengruppen sei. Er wurde daraufhin 1933 seines

[80]Oft wird auch Carl Ludwig Siegel zitiert: "I saw Hasse for the first time wearing Nazi-party insignia! It is incomprehensible to me how an intelligent and conscientious man can do such a thing. I then learned that the foreign policy occurences of recent years had made Hasse into a convinced follower of Hitler"; gemäß Segal [123], S. 165, sind diese Worte 'nicht zu unterschätzen', allerdings handelte es sich wohl nicht um das NSDAP-Abzeichen, sondern um ein von Hasse oft getragenes Sportabzeichen.

Amtes enthoben. Seine Suspendierung erfuhr er aus der Zeitung." schreibt Gundlach [42]. Insbesondere seine Begründung der Knotentheorie aus dieser Königsberger Zeit verhalf Reidemeister zu weiter Anerkennung. Durch Intervention von Blaschke wurde Reidemeister nach Marburg berufen.

Ende des Sommersemesters 1935 wurde Hensel aufgefordert, seine Lehrtätigkeit niederzulegen; der Rektor gab hierfür als Grund die von den Nationalsozialisten erlassenen Nürnberger Rassengesetze an. Dem Reichsbürgergesetz vom 16. September 1935 zufolge durfte kein Jude mehr ein öffentliches Amt innehaben.[81] Am 19. Dezember 1935 wurde Hensel mitgeteilt, dass er zum Jahresende in den Ruhestand versetzt würde, was jedoch keine Woche später widerrufen wurde, weil formal emeritierte Hochschullehrer nicht als Beamte in diesem Sinne anzusehen wären. Einerseits wurde Hensel in seiner Personalakte mit dem zusätzlichen Vornamen 'Israel' geführt, andererseits scheint die Universität Marburg bis zu Hensels Tod 1941 keine weiteren Ressentiments gegen ihn vorgebracht zu haben. Im Jahr 1939 trat Hensel auf Hasses Rat aus der DMV aus, wohl um einem Ausschluss zuvorzukommen (vgl. Gundlach [42] bzw. Petri [108], S. 24/25).

Ein trauriger Kollege Hensels in Marburg war der Psychologe Erich Rudolf Ferdinand Jaensch (1883-1940). Seit 1913 hielt dieser einen Lehrstuhl an der Universität Marburg inne; in seiner Forschung vertrat er eine experimentalpsychologische Richtung. Bekannt wurde Jaensch durch seine in den 1920ern entwickelte Typologie, welche, basierend auf wahrnehmungspsychologischen Überlegungen und einem religionspsychologischen Ansatz, eine Klassifizierung in Integrationstypen (J) und (S) bereitstellt; hierbei besitzen J-Typen integrierte psychische Funktionen, die ihre Anregungen alleine aus ihrer Wahrnehmung der Außenwelt beziehen, während S-Typen psychisch labil sind und sich nicht an irgendeiner Vorstellung orientieren. Jaensch' Typologie wurde von den Nazis in ihre menschenverachtende Rassenlehre integriert. Bieberbach nahm die Jaensche Typenlehre als Anlass "für meine eigene Wissenschaft, die Mathematik, den Einfluß von Volkstum, von Blut und Rasse, auf den Stil des Schaffens an verschiedenen Beispielen klarlegen."; so ist gemäß Bieberbach etwa Landaus analytische Definition der Kreiszahl π als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle des Kosinus ein Beispiel für das 'unnatürliche nicht-arische Denken' eines S-Typs. Bieberbach schließt "(...) all unser Tun wurzelt in Blut und Rasse und empfängt von ihnen seine Eigenart." [9] (bzw. Remmert [113]). Im Rahmen dieser 'Deutschen Mathematik' vertrat Bieberbach weitere haarstreubende Standpunkte; siehe hierzu Remmert [113] und Segal [123] sowie die zeitgenössische Replik von Godfrey Hardy [43].[82]

Jaensch bekannte sich spätestens seit 1932 öffentlich zu den Nazis, 1933 trat er der NSDAP und dem NS-Lehrerbund bei. Tatsächlich war er einer der Vertreter des NS-Gedankenguts im Fachbereich Psychologie. Seine Ideologie färbte auch das von ihm an der Universität 1933 gegründete 'Institut für psychologische Anthropologie' braun. Im Jahr 1939 wurde Jaensch zum Rektor der Universität Marburg ernannt, die Ernennung nahm er in NS-Uniform entgegen. Im Jahr darauf verstarb Jaensch, fünf Jahre vor dem

[81] Frontkämpfer des ersten Weltkrieges waren von den Repressalien des Gesetzes zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums 1933 noch ausgeschlossen worden.

[82] Die verschiedenen Vorworte von Perrons Buch *Irrationalzahlen* [107] liefern einen interessanten Einblick in den Wandel der Zeit; insbesondere die ironische Rechtfertigung im Vorwort der zweiten Auflage gegen einen bösen Bieberbachschen Kommentar über die Verwendung 'unnaturgemäßer Methoden' ist äußerst lesenswert.

Niedergang des 'Tausendjährigen Reichs'. Bieberbach überlebte den zweiten Weltkrieg, wurde danach all seiner Ämter enthoben und hatte nie wieder eine Professur inne.

8. p-ADISCHE ZETAFUNKTIONEN UND WEITERE ENTWICKLUNGEN

In den 1950er Jahren traten analytische Aspekte der p-Zahlen überraschend in den Vordergrund. Tatsächlich sind p-adische Zahlen nämlich auch im Hinblick auf die Riemannsche Zetafunktion sowie verwandte L-Funktionen und der mit diesen verbundenen Zahlentheorie interessant. Der Zusammenhang ergibt sich über spezielle Werte dieser erzeugenden Funktionen im Allgemeinen und die Bernoullischen Zahlen B_m im Besonderen. Letztere sind definiert durch die Potenzreihenentwicklung

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{z^m}{m!} = \frac{z}{\exp(z)-1} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2 + \ldots$$

und allesamt rational.[83] Im Jahr 1840 entdeckten Karl Georg Christian von Staudt [131] und Thomas Clausen [23] zeitgleich, aber unabhängig voneinander, eine seltsame Eigenschaft der Nenner[84] von Bernoulli-Zahlen:

$$B_m + \sum_{\substack{p \\ m \equiv 0 \bmod (p-1)}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}.$$

Beispielsweise gilt somit

$$B_{30} = \frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322} \qquad \text{und} \qquad B_{30} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{31} = 601\,580\,875.$$

Ein p-adischer Beweis basiert auf der Identität $\sum_{j=0}^{n-1} j^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} B_j \frac{n^{m+1-j}}{m+1-j}$. Insbesondere liefert diese Beobachtung der Bernoullischen Zahlen die Kogruenz $pB_m \equiv -1 \bmod p$ für durch $p-1$ teilbare m. Eine weitere Familie von Kongruenzen ähnlicher Art entdeckte Ernst Eduard Kummer [77]:[85]

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_n}{n} \bmod p \qquad \text{für} \quad m \equiv n \not\equiv 0 \bmod (p-1).$$

Diese bemerkenswerten *Kummer Kongruenzen* wurden seinerzeit als Kuriosität angesehen, bis schließlich die p-adische Maschinerie einen natürliche Herleitung lieferte. Dies wurde durch die bemerkenswerte Arbeiten von Tomotsugu Kubota und Heinrich-Wolfgang Leopoldt [75, 81] ermöglicht; diesen gelang auf den Kummerschen Kongruenzen aufbauend u.a. der Nachweis der Existenz einer p-adischen Zetafunktion $\zeta_p(s)$, welche die klassische Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ auf den negativen ganzen Zahlen interpoliert:

$$\zeta_p(1-m) = \zeta(1-m)(1-p^{m-1}) \qquad \text{für} \quad m \equiv 0 \bmod p-1;$$

der Faktor $1-p^{m-1}$ auf der rechten Seite ist exakt der Faktor der Primzahl p im reziproken Euler-Produkt der Zetafunktion an der Stelle $1-m$. Also auch hier ergibt sich wiederum ein lokal-globaler Zusammenhang! Verallgemeinerungen auf Dirichletsche L-Reihen liefern p-adische Analoga der Klassenzahlformel. Mehr zu den Bernoullischen Zahlen und den Kummerschen Kongruenzen findet sich etwa in Arakawa et al. [2], Einführungen in

---

[83] Die Bernoulli-Zahlen berechnen sich rekursiv mit Hilfe der Formel $B_n = (-1)^n \sum_{0 \leq k \leq n} B_k \frac{z^n}{n!}$.

[84] Die Zähler der Bernoulli-Zahlen hängen übrigens über dem Begriff der 'irregulären' Primzahlen mit der Arithmetik von Kreisteilungskörpern und Kummers Ansatz zur Lösung der Fermatschen Vermutung zusammen; siehe Ribenboim [114].

[85] Tatsächlich bestehen sogar hierüber hinausgehende Kongruenzen: Gilt etwa $(p-1)p^j|(m-n)$, so besteht die Kongruenz sogar modulo p^{j+1}.

die p-adische Analysis mit ihren Anwendungen auf die Zetafunktion liefern Koblitz [73], Lang [79] und Washington [141].

Eine weitere Konstruktion der p-adischen Zetafunktion gelingt mit Hilfe p-adischer Integration, wie etwa nach Barry Mazur (nicht publiziert; cf. [73]) ausgearbeitet und später von Nicolas Katz [70] für p-adische Interpolationen von Eisenstein-Reihen fortgeführt. Tatsächlich wurde dies von John Coates und Andrew Wiles [24] auf den Fall p-adischer L-Funktionen zu elliptischen Kurven ausgebaut, und dies bildet ein nicht unwesentliches Werkzeug in Wiles' berühmten Beweis der Fermatschen Vermutung. Auch bestehen hier interessante Verbindungen zu einem der sieben Millenniums-Problemen, nämlich der Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer. Diese berühmte offene Vermutung von Bryan Birch und Peter Swinnerton-Dyer ist eines der sieben Millenniumsprobleme und behandelt über $\mathbb{Q}$ definierte elliptische Kurven E und besagt im Wesentlichen, dass die globale Anzahl der rationalen Punkte auf E durch lokale Informationen festgelegt ist. Etwas präziser formuliert entscheidet die Ordnung der Nullstelle der der elliptischen Kurve zugeordnete L-Funktion $L(s, E)$ (eine Verwandte von $\zeta(s)$) im Symmetriepunkt $s = 1$ der Funktionalgleichung (ähnlich der Riemannschen Funktionalgleichung für $\zeta(s)$) den Rang der Gruppe der rationalen Punkte auf E fest. Ignoriert man die Konvergenz des $L(s, E)$ definierenden Euler-Produktes, so spielt der Wert $L(1, E)$ eine ähnliche Rolle wie die singuläre Reihe im Waringschen Problem.[86]

Zurückblickend findet man bereits bei Hensel [61] Bemerkenswertes zur p-adischen Analysis, nämlich die p-adischen Analoga der Exponentialfunktion und des Logarithmus; Reinhold Strassmann, ein Doktorand von Hensel, hat hier weitere maßgeblichen Fortschritte zur Begründung einer Theorie geleistet. Weitere Verdienste insbesondere auf dem Gebiet der p-adischen Zeta- unf L-Funktionen sind Yvette Amice und Bernard Dwork zu verdanken; dem letzteren gelang der Nachweis [31], dass die Zetafunktion einer Varietät über einem endlichen Körper rational ist – in schönster Analogie zu Hasses Beweis [49] der Rationalität der zu einer elliptischen Kurve assoziierten Zetafunktion von 1936, bzw. deren Verallgemeinerung auf Kurven beliebigen Geschlechts durch Andre Weil (geläufig unter dem Stichwort 'Riemannsche Vermutung für Kurven').

> "In the days of Dirichlet and Hermite, and even Minkowski, the appeal to "continuous variables" in arithmetical questions may well have seemed to come out of some magician's bag of tricks. In retrospect, we see now that the real numbers appear there as one of the infinitely many completions of the prime field, one which is neither more nor less interesting to the arithmetician than its p-adic companions, and that there is at least one language and one technique, that of the adeles, for bringing them all together under one roof and making them cooperate for a common purpose. It is needless here to go into the history of these developments; suffice it to mention such names as Hensel, Hasse, Chevalley, Artin; every one of these,and more recently Iwasawa, Tate, Tamagawa, helped to make some significant step forward along this road."

schreibt Weil [143], S. V. Die Arbeiten zur Leopoldt-Vermutung und Kenkichi Iwasawas Theorie zu p-adischen Klassenzahlen und Kreisteilungskörper liest man am besten bei

[86]Auch der Beweis des Satzes von Nagell-Lutz in der Theorie der elliptischen Kurven benutzt im Prinzip die Idee p-adischer Zahlen; siehe etwa Cassels [20].

zunächst Murty [99] und dann bei Lang [79] bzw. Washington [141] nach. Bei Iwasawa treten weitere L-Funktionen auf und erstaunlicherweise auch weitere Kongruenzen zu den Bernoullischen Zahlen.

Etliche Aspekte p-adischer Zahlen wurden nicht einmal angerissen. Beispielsweise bewies Andrzej Schinzel [119] ein Lokal-Global-Prinzip für exponentielle Gleichungen

$$a_1^{X_1} \cdot \ldots \cdot a_m^{X_m} = b$$

über Zahlkörpern. Ganze Teilgebiete wurden ausgelassen (wie etwa p-adische Funktioneniteration oder p-adische Ergodentheorie); Anregungen hierzu finden sich in der Einstiegsliteratur zu p-adischen Zahlen. Der Klassiker [89] von Mahler baut den Henselschen Ansatz weiter aus und ist das erste Lehrbuch zur p-adischen Analysis; moderne Einführungen in dieses Gebiet liefern das lesenswerte und breits genannte Buch [40] von Gouvêa sowie das umfangreichere [116] von Robert. Elementare bzw. algebraische Einführungen in die Welten der p-adischen Zahlen sowie Beweise des Satzes von Hasse-Minkowski stellen die Monographien von Frey [37], Serre [125] und Cassels [19] bereit. Einbettungen der p-adischen Zahlen in das Gesamtkunstwerk sind am besten den Klassikern Hasse [52] und Borewicz & Šafarevič [11] gelungen. Die historischen Aspekte sind am besten bei Petri [108], Schwermer [122] und Ullrich [137, 136] dargestellt.

Literatur

[1] H.-W. Alten, A. Djafari Naini, B. Eick, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote, H. Wesemüller-Kock, H. Wussing, *4000 Jahre Algebra*, Springer, 2. Auflage 2014

[2] T. Arakawa, T. Ibukiyama, M. Kaneko, *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, Springer, 2014

[3] E. Artin, *Collected Papers*, S. Lang, J.T. Tate (Herausgeber), Springer, 1982

[4] J. Ax, S. Kochen, Diophantine problems over local fields I., *Amer. J. Math.* **87** (1965), 605-630

[5] R. Balasubramanian, On Waring's problem: $g(4) \leq 20$, *Hardy-Ramanujan J.* **8** (1985), 1-40

[6] F. Beukers, J.P. Bézivin, P. Robba, An alternative proof of the Lindemann-Weierstrass theorem, *Am. Math. Mon.* **97** (1990), 193-197

[7] J.P. Bézivin, P. Robba, A new p-adic method for proving irrationality and transcendence results, *Ann. of Math.* **129** (1989), 151-160

[8] M. Bhargava, J. Hanke, Universal quadratic forms and the 290-Theorem, *Invent. math.* (im Druck)

[9] L. Bieberbach, Persönlichkeitsstruktur und Mathematisches Schaffen, *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften* **40** (1934), 236-243

[10] B.J. Birch, Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables, *Mathematika* **4** (1957), 102-105

[11] S.I. Borewicz, I.R. Šafarevič, *Zahlentheorie*, Birkhäuser, 1966

[12] S. Bosch, Half a Century of Rigid Analytic Spaces, *Pure Appl. Math. Quarterly* **5** (2009), 1435-1467

[13] U. Bottazzini, J. Gray, *Hidden Harmony - Geometric Fantasies*, Springer, 2013

[14] L.E.J. Brouwer, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie. (Erste Mitteilung.). *Math. Ann.* **67** (1909), 246-267

[15] L.E.J. Brouwer, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie. (Zweite Mitteilung.). *Math. Ann.* **69** (1910), 181-203

[16] T.D. Browning, *Quantitative Arithmetic of Projective Varieties*, Birkhäuser, 2009

[17] G. Cantor, Ueber die Ausdehnung eines Satzs aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math. Ann.* **5** (1872), 123-132

[18] G. Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen, *J. reine angew. Math.* **77** (1873), 258-263

[19] J.W.S. Cassels, *Local Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986

[20] J.W.S. Cassels, *Lectures on Elliptic Curves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991
[21] C. Chevalley, La théorie du corps de classes, *Ann. Math.* **41** (1940), 394-418
[22] R. Chorlay, "Local-global": the first twenty years, *Arch. Hist. Exact Sci.* **65** (2011), 1-66
[23] T. Clausen, Lehrsatz aus einer Abhandlung über die Bernoullischen Zahlen, *Astron. Nachrichten* **17** (1840), 351-352
[24] J. Coates, A. Wiles, On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* **39** (1977), 223-251
[25] A.A. Cuoco, Visualizing the p-adic Integers, *Amer. Math. Monthly* **98** (1991), 355-364
[26] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig 1888
[27] R. Dedekind, *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen.* Mit einem Geleitwort von B. van der Waerden, Vieweg, 1964; Nachdruck des XI Supplements (von 1894) von Dedekinds Vorlesungen über Zahlentheorie (1863)
[28] R. Dedekind, H. Weber, Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, *J. reine angew. Math.* **92** (1882), 181-291
[29] J.-M. Deshouillers, F. Dress, Sums of 19 biquadrates: on the representation of large integers, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **19** (1992), 113-153
[30] W. Duke, R. Schulze-Pillot, Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids, *Invent. math.* **99** (1990), 49-57
[31] B. Dwork, On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, *Amer. J. Math.* **82** (1960), 631-648
[32] M. Euwe, Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel, *Proc. Konin. Akad. Wetenschappen* **32** (1929), 633-642
[33] A.A.H. Fraenkel, Axiomatische Begründung von Hensels p-adischen Zahlen, *J. reine angew. Math.* **141** (1912), 43-76
[34] A.A.H. Fraenkel, Axiomatische Begrndung der transfiniten Kardinalzahlen. I, *Math. Zeitschr.* **13** (1922), 153-188
[35] G. Frei, The Unpublished Section Eight: On the Way to Function Fields over a Finite Field, in: *The shaping of arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer (eds.), 159-198
[36] H. Freudenthal, Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen, *Compositio math.* **4** (1937), 145-234
[37] G. Frey, *Elementare Zahlentheorie*, Vieweg, 1984
[38] C.F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Gerhard Fleischer, Leipzig 1801; deutsche Übersetzung herausgegeben von H. Maser, Springer, 1889
[39] C.F. Gauss, *Mathematisches Tagebuch 1796-1814*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1976
[40] F.Q. Gouvêa, *p-adic numbers*, Springer, Berlin, 2nd ed. 1997
[41] J. Gray, *Plato's Ghost*, Princeton University Press, 2008
[42] K.-B. Gundlach, *100 Jahre Mathematisches Seminar. Ein Rückblick auf die Entwicklung der Mathematik in Marburg*, Fachbereich Mathematik der Universitt Marburg, 1985
[43] G.H. Hardy, The J-type and the S-type among Mathematicians, *Nature* **134** (1934), 250
[44] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, Some problems of "Partitio Numerorum". VI: Further researches in Waring's problem. *Math. Z.* **23** (1925), 1-37
[45] H. Hasse, Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* **152** (1923), 129-148
[46] H. Hasse, Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* **152** (1923), 205-244
[47] H. Hasse, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, *J. Reine Angew. Math.* **153** (1924), 113-130
[48] H. Hasse, Äquivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, *J. Reine Angew. Math.* **153** (1924), 184-191
[49] H. Hasse, Über die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, *C. R. Congr. internat. Math., Oslo, 1936,* **1** (1937), 189-206 (1937)
[50] H. Hasse, Kurt Hensel zum Gedächtnis, *J. reine angew. Math.* **187** (1949), 1-13

[51] H. Hasse, Kurt Hensels entscheidender Anstoß zur Entdeckung des Lokal-Global-Prinzips, *J. reine angew. Math.* **209** (1962), 3-4
[52] H. Hasse, *Zahlentheorie*, Akademie-Verlag Berlin, 2. Auflage 1963
[53] H. Hasse, E. Tornier, Über die Dichte der quadratfreien Zahlen und ähnliche Dichten in einem algebraischen Zahlkörper, *Leopoldina* **3** (1928), 9-16
[54] K. Hauser, F. Herrlich, M. Kneser, H. Opolka, N. Schappacher, E. Scholz, Oswald Teichmüller - Leben und Werk, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **94** (1992), 1-39
[55] W.K. Hayman, My background and early life, *Comput. Methods Funct. Theory* **8** (2008), xixxvi
[56] K. Hensel, Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.* **6** (1897), 83-88
[57] K. Hensel, Neue Grundlagen der Arithmetik, *J. reine angew. Math.* **127** (1904), 51-84
[58] K. Hensel, Über die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **14** (1905), 545-558
[59] K. Hensel, Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **16** (1907), 299-319, 388-393, 473-496
[60] K. Hensel, *Theorie der algebraischen Zahlen*, Teubner, Leipzig und Berlin 1908
[61] K. Hensel, *Zahlentheorie*, Teubner, Leipzig und Berlin 1913
[62] K. Hensel, G. Landsberg, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*, Teubner, Leipzig 1902
[63] C. Hermite, Sur la fonction exponentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris* **77** (1873), 18-24, 74-79, 226-233, 285-293
[64] D. Hilbert, *Grundlagend er Geometrie*, Teubner 1899
[65] D. Hilbert, Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, in: *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, Teubner 1905, 174-185
[66] D. Hilbert, Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem), *Math. Ann.* **67** (1909), 281-300
[67] D. Hilbert, A. Hurwitz, Diophantische Gleichungen vom Geschlecht null, *Acta Math.* **14** (1891), 217-224
[68] M. Hindry, J.H. Silverman, *Diophantine Geometry*, Springer, 2000
[69] A. Hurwitz, Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n-ten Potenzen ganzer Zahlen, *Math. Ann.* **65** (1908), 424-427
[70] N. Katz, p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series, *Ann. of Math.* **104** (1976), 459-571
[71] A.J. Kempner, Bemerkungen zum Waringschen Problem, *Math. Ann.* **72** (1912), 387-399
[72] M. Kneser, *Quadratische Formen*, Springer, 2002, neu bearbeitet und herausgegeben in Zusammenarbeit mit R. Scharlau
[73] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, Springer, 1984
[74] L. Kronecker, Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen, *J. reine angew. Math.* **91** (1881), 301-334
[75] T. Kubota, H.W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte. I. Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen, *J. Reine Angew. Math.* **214/215** (1964), 328-339
[76] H. Kühne, Angenäherte Auflösung von Kongruenzen nach Primmodulsystemen in Zusammenhang mit den Einheiten gewisser Körper, *J. reine angew. Math.* **126** (1903), 102-115
[77] E.E. Kummer, Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungscoëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen, *J. Reine Angew. Math.* **41** (1851), 368-372
[78] J. Kürschák, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, *J. Reine Angew. Math.* **142** (1913), 211-253
[79] S. Lang, *Cyclotomic Fields*, Springer 1978
[80] A-M. Legendre, Recherches d'Analyse Indéterminée, *Histoire de l'Academie Royale des Sciences de Paris* (1785), 465-559
[81] H.W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte. II Die p-adische Γ-Transformation. *J. Reine Angew. Math.* **274/275** (1975), 224-239
[82] F. Lindemann, Ueber die Zahl π, *Math. Ann.* **20** (1882), 213-225
[83] Yu. Linnik, *Ergodic Properties of alegbraic fields*, Springer, 1968 (aus dem Russischen übersetzt)
[84] J. Liouville, Remarques relatives 1° à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques; 2° à un passage du livre des Principes

où Newton calcule l'action exercée par une sphére sur un point extérieur, *C.R. Acad. Sci. Paris* **18** (1844), 883-885

[85] S. Mac Lane, *Kategorien*, Springer, 1972

[86] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, *Math. Ann.* **101** (1929), 342-366; Corrigendum **103** (1930), 532

[87] K. Mahler, Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor-Koeffizienten rationaler Funktionen, *Proc. Akad. Amsterdam* **38** (1935), 50-60

[88] K. Mahler, Über transzendente P-adische Zahlen, *Compositio math.* **2** (1935), 259-275

[89] K. Mahler, *Introduction to p-adic numbers and their functions*, Cambridge University Press, 1973

[90] B. Mazur, On the passage from local to global in number theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1993), 14-50

[91] C. Méray, Remarques sur la nature des quantités définies de servir de limites á des variables données, *Revue des Soc. Savantes Sci. math. phys. nat.* **4** (1869), 280-289

[92] A. Meyer, Ueber die Kriterien für die Auflösbarkeit der Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = 0$ in ganzen Zahlen, *Vierteljahr. Naturforsch. Ges. Zürich* **29** (1884), 209-222

[93] H. Minkowski, Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten, übersetzt: Mémoire sur la théorie des formes quadratiques, tome 29, *Mémoires presentés par divers savants á l'Academie des Sciences de l'Institut national de France*, 180 Seiten

[94] H. Minkowski, Untersuchungen über quadratische Formen. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, die ein gegebenes Genus enthält, *Acta Math.* **7** (1885), 201-258 mit ganzzahligen Koeffizienten, übersetzt: Mémoire sur la théorie des formes quadratiques, tome 29, *Mémoires presentés par divers savants á l'Academie des Sciences de l'Institut national de France*, 180 Seiten

[95] H. Minkowski, Ueber die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Coeffizienten in einander transformirt werden können, *J. Reine Angew. Math.* **106** (1890), 5-26

[96] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig, 1896

[97] L.J. Mordell, *Diophantine equations*, Academic Press 1969

[98] H.M. Morse, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, *American M. S. Trans.* **22** (1921), 84-100

[99] M.R. Murty, *Introduction to p-adic Analytic Number Theory*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 2002

[100] W. Narkiewicz, *Rational Number Theory in the 20th Century*, Springer, 2012

[101] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, 1992

[102] J. Neukirch, *Klassenkörpertheorie*, Springer, 2011; neu herausgegeben von Alexander Schmidt

[103] H. Opolka, W. Scharlau, *Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung*, Springer 1980

[104] A. Ostrowski, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$, *Acta Math.* **41** (1917), 271-284

[105] N. Oswald, David Hilbert, ein Schüler von Adolf Hurwitz?, *Siegener Beitr. Geschichte Phil. Math.* (im Druck)

[106] O. Perron, Was sind und was sollen die irrationalen Zahlen? *Deutsche Math.-Ver.* **16** (1907), 142-155

[107] O. Perron, *Irrationalzahlen*, de Gruyter, 1. Auflage 1920, 2. Auflage 1939, 3. Auflage 1947

[108] B. Petri, *Perioden, Elementarteiler, Transzendenz - Kurt Hensels Weg zu den p-adischen Zahlen*, Verlag Dr. Hut, München, 2011

[109] M. Planck, Die neuere Entwicklung der theoretischen Physik, Beitrag zur *Festschrift zum siebzigsten Geburtstag von Friedrich Schmidt-Ott*, ebenso in *Materie und Energie*, Berlin 1932

[110] E. Prouhet, Mémoir sur quelques relations entre les puissances des nombres, *C.R. Adad. Sci. Paris* **33** (1851), 225

[111] G. Rados, Über Kongruenzbedingungen der rationalen Lösbarkeit von algebraischen Gleichungen, *Math. Ann.* **87** (1922), 78-83

[112] C. Reid, *Courant in Göttingen and New York*, Springer 1976

[113] V.R. Remmert, Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung im "Dritten Reich": Krisenjahre und Konsolidierung, *Mitt. Dtsch. Math.-Ver.* **12-3** (2004), 159-177

[114] P. Ribenboim, *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer, 1979

[115] D. Ridout, The p-adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem, *Mathematika* **5** (1958), 40-48

[116] A. Robert, *A course in p-adic analysis*, Springer, New York, NY, 2000

[117] P. Roquette, History of Valuation Theory. I, in: *Valuation theory and its applications. Volume I.* Proceedings of the international conference and workshop, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada, July 28-August 11, 1999, F.-V. Kuhlmann (ed.) et al., American Mathematical Society, *Fields Inst. Commun.* **32** (2002), 291-355

[118] N. Schappacher, Das Mathematische Institut der Universität Göttingen 1929-1950, in: *Die Universität Göttingen unter dem Nationalsozialismus*, Becker, Dahms, Wegeler (Hrsg.), K.G. Saur München 1987, 345-373

[119] A. Schinzel, On power residues and exponential congruences, *Acta Arith.* **27** (1975), 397-420

[120] H.P. Schlickewei, Die p-adische Verallgemeinerung des Satzes von Thue-Siegel-Roth-Schmidt, *J. Reine Angew. Math.* **288** (1976), 86-105

[121] W.M. Schmidt, *Analytische Methoden für Diophantische Gleichungen*, Birkhäuser 1984

[122] J. Schwermer, Minkowski, Hensel, and Hasse: On the beginnings of the local-global principle, in: *Episodes in the history of modern algebra (18001950)*, 153177, *Hist. Math.* **32**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[123] S.L. Segal, *Mathematicians under the Nazis*, Princeton University Press 2003

[124] E.S. Selmer, The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$, *Acta Math.* **85** (1951), 203-362 & **92** (1954), 191-197

[125] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Springer, 1973

[126] A. Shields, Lejeune Dirichlet and the birth of analytic number theory: 1837-1839, *Math. Intelligencer* **11** (1989), 7-11

[127] C.L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen I, II, III, *Ann. of Math.* **36** (1935), 527-606; **37** (1936), 230-263; **38** (1937), 212-291

[128] Th. Skolem, Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen, *Skifter Oslo* **6** (1933), 61 Seiten

[129] Th. Skolem, Unlösbarkeit von Gleichungen, deren entsprechende Kongruenz für jeden Modul lösbar ist, *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo* **4** (1942), 1-28

[130] Th. Sonar, *3000 Jahre Analysis*, Springer, 20111

[131] K.G.C. von Staudt, Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend, *J. Reine Angew. Math.* **21** (1840), 372-374

[132] E. Steinitz, Review JFM 33.0427.01 of [62] in *Jahrbuch über die Forstschritte der Mathematik*, available via Zentralblatt

[133] E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, *J. reine angew. Math.* **137** (1910), 167-307

[134] G. Terjanian, Un contre-exemple á une conjecture d'Artin, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.* **262** (1966), 612.

[135] A. Thue, Über unendliche Zeichenreihen, *Norske vid. Selsk. Skr.* **7** (1906), 1-22

[136] P. Ullrich, Der Henselsche Beweisversuch für die Transzendenz von e, in: *Mathematik im Wandel. Bd. 1. Anregungen zu einem fächerübergreifenden Mathematikunterricht.* Toepell, Michael (Herausgeber), Franzbecker, Hildesheim 1998, 320-330

[137] P. Ullrich, The genesis of Hensel's p-adic numbers, in: *Karl der Große und sein Nachwirken. 1200 Jahre Kultur und Wissenschaft in Europa. Band 2: Mathematisches Wissen.* Butzer, P. L. (Herausgeber) et al., K Turnhout: Brepols 1998, 163-178

[138] B. van der Waerden, *Moderne Algebra, I* Springer, 1930; 2. Auflage 1937; 3. Auflage 1950; dann als *Algebra, I*, 4. Auflage 1955, 5. Auflage 1960; 7. Auflage 1966; 8. Auflage 1971; 9. Auflage 1993

[139] B. van der Waerden, *Algebra II*, Springer, 1931; 2. Auflage 1940; dann als *Algebra, II*, 3. Auflage 1955; 4. Auflage 1959; 5. Auflage 1967; 6. Auflage 1993

[140] E. Waring, *Meditationes algebraicae*, J. Archdeacon, Cambridge, 1782

[141] L.C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Springer, 1982

[142] H. Weber, Leopold Kronecker, *Math. Ann.* **43** (1893), 1-25

[143] A. Weil, *Basic Number Theory*, Springer, 1967

[144] A. Weil, *Number Theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre.* Birkhäuser 2007, Reprint of the 1984 edition

[145] H. WEYL, Review of Nielsen, *Elemente der Funktionentheorie*, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **21** (1912), 96-97

[146] A. WIEFERICH, Beweis des Satzes, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen läßt, *Math. Ann.* **66** (1909), 95-101

[147] E. WITT, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, *J. Reine Angew. Math.* **176** (1936), 31-44

[148] B.H. YANDELL, *The Honors Class*, A K Peters, 2002

Jörn Steuding
Institut für Mathematik, Universität Würzburg
Emil-Fischer-Str. 40, 97074 Würzburg
steuding@mathematik.uni-wuerzburg.de