

F2 - Praktikumsversuch
Q u a n t e n c h a o s
Bestimmung von Eigenfrequenzen und Wellenfunktionen
in billardförmigen Hohlraumresonatoren
(Version vom 08.04.2008)

Einführung

Als Einführung in die Thematik studiere man den beiliegenden Aufsatz „Experimente zum Quantenchaos“ [1] sowie die beiden Originalarbeiten [2,3].

Der Versuch besteht aus drei Teilen:

Im ersten Teil werden Resonanzfrequenzen billardförmiger Hohlraumresonatoren bestimmt. Dazu werden Mikrowellen in die Billards eingestrahlt und das reflektierte Signal gemessen. Bei den Resonanzfrequenzen bildet sich eine stehende Welle im Resonator aus, wodurch Energie in den Resonator eingekoppelt wird. Die vom Analysator gemessene (ausgekoppelte) Energie ist dann von geringerer Intensität: die Resonanzen machen sich also als Einbrüche in der reflektierten Mikrowellenleistung bemerkbar.

Im zweiten Versuchsteil wird eine Wellenfunktion im Resonator vermessen. Durch zweidimensionales Abtasten der Billardfläche erhält man ein Abbild der stehenden Welle. Es stehen Resonatoren in der Form eines Stadion-, Sinai-, Rechteck- und Halbkreisbillards zur Verfügung. Es wird je eine Messung an einem integrierbaren (Rechteck- oder Halbkreis-) und einem nichtintegrierbaren (Stadion- oder Sinai-) Billard durchgeführt.

Im dritten Versuchsteil sollen mit Hilfe eines Computerprogramms Trajektorien von verschiedenen klassischen Billards untersucht werden. Dabei soll erarbeitet werden, wie sich Chaos in Phasenraumstrukturen manifestiert und welche Zusammenhänge zwischen klassischem Chaos und Quantenchaos bestehen.

Aufgrund der erheblichen Datenfülle erfolgen Messwertaufnahme und Datenanalyse mittels Computer. Die jeweils eingesetzten Programme werden in den beiden Versuchsteilen beschrieben.

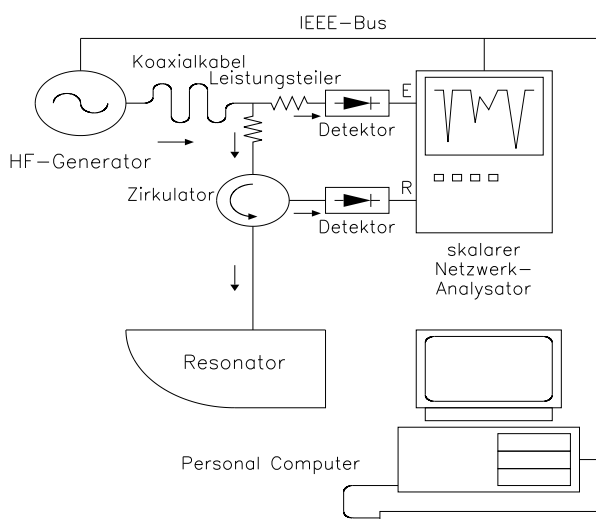
Versuchsaufbau

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Mikrowellen-Versuchsaufbau, die Pfeile zeigen die Ausbreitungsrichtung der Mikrowellen:

Die vom Generator erzeugten Mikrowellen werden über ein Koaxialkabel einem Leistungsteiler zugeführt. Von diesem werden sie einerseits durch einen Zirkulator in den Resonator geleitet, andererseits zu einem Detektor, der an den Analysator angeschlossen ist. Das im Resonator reflektierte Signal wird wieder durch den Zirkulator einem zweiten Detektor zugeführt und so vom Analysator gemessen. (Die Detektoren wandeln das Mikrowellensignal in ein Spannungssignal um.)

Der Analysator teilt das Messsignal durch das Referenzsignal und kann dadurch Kabelstörungen unterdrücken.

Der PC steuert Generator und Analysator und speichert die Messdaten.



Teil I Bestimmung der Resonanzfrequenzen im Frequenzbereich von 1.25 GHz bis 18.5 GHz.

Messung

Man starte das Messprogramm und wähle den Menüpunkt *Measurement: Spectrum* aus. Im folgenden Dialogfenster werden die Parameter für die Messung sowie ein Dateiname zum Abspeichern abgefragt. Man sollte das Billard bei der Positionierung vor der Messung *n i c h t* auf die beiden Seitenmitten hin zentrieren! (Beim Rechteck sind die Symmetrieachsen für viele Resonanzfrequenzen Knotenlinien, an denen sich keine Energie einkoppeln lässt!)

Da die Messgeräte den gesamten Frequenzbereich von 1.25 GHz bis 18.5 GHz nicht auf einmal untersuchen können, geschieht dies intervallweise; dies kann man am Display des Meßgerätes verfolgen. (Bei Frequenzen $\nu > 18.74$ GHz lassen sich die eingesetzten Billards mit einer Bauhöhe von $d = 8$ mm nicht mehr als zweidimensional auffassen: Für $\nu > c/2d$ bilden sich stehende Wellen auch in z-Richtung aus, vgl. beiliegende Arbeiten.)

Nach Abschluss der Messung bestätigt das Programm die Speicherung der gemessenen Daten.

Auswertung

Die gemessenen Spektren können wie folgt in das Auswerteprogramm *f1chaos* eingeladen werden: Zunächst starte man das Programm *IDL* und gebe in dessen Kommandozeile den Befehl *f1chaos* ein. Mit dem Menüpunkt *Load: SNA* kann man dann die Spektren einladen. Anschließend sollte man Fläche und Umfang des verwendeten Billards im Menüpunkt *Billard: BillardParameter* eintragen! Diese werden später bei der Auswertung benötigt.

Das Programm ermöglicht das Markieren von Resonanzen; die Mehrzahl der Resonanzen sind stark genug, um sie vom Programm halbautomatisch finden zu lassen. Dazu stellt man die zweite Ableitung des Spektrums dar, weil darin die Lorentz-Linien schärfer und damit leichter erkennbar sind. Mit Hilfe einer Diskriminator-Linie kann man dann alle Peaks, die eine gewisse Mindesthöhe haben, automatisch markieren lassen.

Schwächere und sich überlappende Resonanzen muß man anschließend noch einzeln markieren.

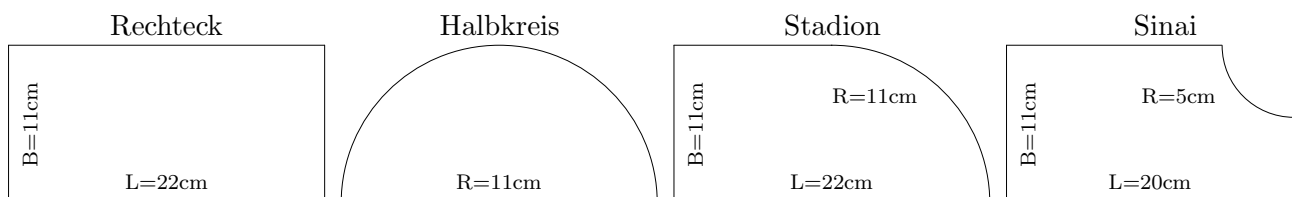
Da der Generator, der die Mikrowellen erzeugt, im Verlauf der Messung nach jedem Frequenzintervall (Messfenster) weitergeschaltet wird, können mitunter bei den Frequenzen, die an den jeweiligen Intervallgrenzen lagen, kleine „Schaltspitzen“ zu sehen sein. Diese haben jedoch eine ganz andere Form und sind gut von den lorentz-förmigen Resonanzen zu unterscheiden. Schwache Peaks großer Breite sind Kabelresonanzen, die nicht markiert werden dürfen.

Nachdem alle Resonanzen markiert worden sind, können diese abgespeichert werden.

Geometrie der Billards

Die theoretisch zu erwartende Anzahl von Resonanzfrequenzen im untersuchten Frequenzintervall (1.25 - 18.5 GHz) lässt sich bei bekannten Resonatormaßen mittels der Weyl-Formel berechnen. Diese Rechnung kann (sollte!) schon vor Versuchsbeginn durchgeführt werden. (vgl. Anhang)

Maße der Billards:



Aufgrund der Symmetrie des Rechtecks und des Halbkreises ist ein erheblicher Schwund von Resonanzen zu erwarten (ca. 30%), beim Stadion bzw. Sinai liegt der Schwund noch bei etwa 10%.

Darstellung

Im Menü *Extract: Fourier-Transform* lässt sich eine Fouriertransformation der markierten Resonanzfrequenzen in den Bahnlängenraum durchführen (die Maxima der Fouriertransformierten entsprechen klassischen periodischen Bahnen, vgl. beiliegende Arbeiten). Die fourier-transformierten Daten kann man ebenfalls abspeichern.

Unter dem Menüpunkt *Extract* kann auch die Nächste-Nachbar-Verteilung der markierten Frequenzen dargestellt werden. (Liefert nur dann akzeptable Diagramme, wenn schon sehr viele Frequenzen markiert wurden!!!) Diese Funktion gibt nur eine Übersicht, die genaue Darstellung ist Aufgabe der Versuchsauswertung!

Teil II Untersuchung stehender Wellen in Billards

Die Messung einer Wellenfunktion kann im Meßprogramm über den Menüpunkt *Measurement: Wavefunction* gestartet werden.

Das Programm verlangt die Eingabe eines schmalen Frequenzbereiches, in dem nur eine Resonanzfrequenz liegen darf. Man wähle eine Resonanzfrequenz zwischen 2 und 6 GHz, da die Ortsauflösung beim manuellen Abtasten des Billards nicht groß genug ist, um feiner strukturierte Wellenfunktionen zu analysieren.

Entweder ist noch eine geeignete Eigenfrequenz aus Teil I bekannt, oder man suche durch wiederholte Eingabe und anklicken des *Set*-Buttons so lange, bis man einen geeigneten Frequenzbereich gefunden hat. Das Meßgerät wird dabei immer wieder neu initialisiert, was jeweils einige Sekunden dauern kann. Nach Eingabe des Frequenzintervalls stellt das Programm am Bildschirm ein Gitternetz dar. In diesem Netz kann man sich mit den Cursortasten bewegen, die aktuelle Position wird ständig angezeigt. Dieses Gitter ist auch auf das Billard geklebt, so dass man durch Verschieben des Billards die Billardfläche gemäß Netzeinteilung 'abfahren' kann. Durch Drücken der Leertaste nimmt der Computer den Minimalwert (vgl. Einleitung: Peaks weisen nach unten) vom Netzwerk-Analysator-Display auf und markiert das zugehörige Feld am Computerbildschirm in einer von diesem Wert abhängigen Farbe. Der Cursor springt automatisch weiter. Es wird stets der Maximal- und Minimalwert der bisher aufgenommenen Werte am Bildschirm ausgegeben, außerdem der zuletzt gemessene Wert. Wenn alle Felder 'ausgemessen' sind, lässt sich das Gesamtfeld über den Menüpunkt *File: Save* speichern.

Teil III Klassisches Chaos in Billards

Fragestellung: Wie äußert sich klassisches Chaos im Phasenraum?

Die Dimension des Phasenraums eines 2D-Billardsystems mit Energieerhaltung ist 3. Daher betrachtet man zur Untersuchung von Phasenraumstrukturen sogenannte Poincaré-Schnitte. Statt dem 3-dim. Phasenraum mit stetiger Dynamik betrachtet man nun einen 2-dim. Phasenraum mit diskreter Dynamik, indem man bei jeder Wandreflexion die Position auf der Berandung und den Einfallswinkel als Punkt in einem Poincaré-Plot aufträgt.

Phasenraumstrukturen: Bei vollständig chaotischen Systemen füllt fast jede Trajektorie den Phasenraum komplett aus. Man spricht dabei von Ergodizität. Bei regulären Systemen hingegen bewegen sich die einzelnen Trajektorien auf eindimensionalen Bahnen (im Poincaré-Schnitt). Dies ist die Folge einer Erhaltungsgröße. Die meisten Systeme sind allerdings weder voll chaotisch noch regulär, sondern sie weisen einen gemischten Phasenraum auf. Um dieses Verhalten genauer zu untersuchen betrachte man das Quadrupol-Billard (auch Nöckel-Billard genannt). Dessen Berandung ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$r(\varphi) = 1 + \varepsilon \cos 2\varphi .$$

Für $\varepsilon = 0$ entspricht dieses dem Kreis; ε parametrisiert also die Deformierung des Kreises.

Zusammenhang mit Quantenchaos: Nur für vollständig chaotische Systeme gelten die Vorhersagen der Zufallsmatrix-Theorie.

Aufgabe: Mit Hilfe des Programms *poincare* sollen die Phasenraumstrukturen und die zugehörigen Bahnen für Kreis-, Ellipse-, Sinai- und Quadrupol-Billard dargestellt und erläutert werden.

Versuchsauswertung

Teil I

a) Man erstelle die Nächste-Nachbar-Statistik für die aufgenommenen Resonanzenergien $E \sim k^2$: jeweils ein Histogramm für die beiden gemessenen Billards. Dazu unterteile man die aufgetretenen Abstände benachbarter normierter Eigenenergien s_i (vgl. Anhang b) in Intervalle, z.B. Abstand 0.0 - 0.1 als 1. Intervall, Abstand 0.1 - 0.2 als 2. Intervall, usw. Dann bestimme man die Anzahl der Elemente (Abstände) in jedem Intervall und zeichne das Histogramm. Um mit den Theoriekurven (Wigner-/Poisson-Verteilung) vergleichen zu können, muß die Histogrammfläche auf 1 normiert werden.

Aufgrund der relativ geringen Anzahl von Abstandswerten wird das Histogramm die Form der theoretischen Kurven nicht sehr gut approximieren. Zudem beeinflusst auch die gewählte Intervallgröße das Aussehen des Histogramms; daher ist es sinnvoll, auch die integrierte Abstandsverteilung zu betrachten. Dabei wird die relative Häufigkeit der Abstände im Intervall $[0,s]$ mit den theoretischen Kurven für $\int_0^s P(s')ds'$ verglichen.

b) Man trage die Anzahl der gefundenen Eigenwerte $n_{exp}(E_i) = n$ über $n_{weyl}(E_i)$ auf. Dabei ist $n_{weyl}(E_i)$ die theoretische Anzahl der Resonanzen die mit der Weyl-Formel bestimmt wird (s. Anhang a).

c) Aufgrund der Gutzwiller-Theorie (siehe Anlage 1), besteht ein Zusammenhang zwischen der Zustandsdichte $\rho(E)$ und den klassischen periodischen Bahnen des Billards. Die Zustandsdichte zerfällt in zwei Anteile: $\rho(E) = \rho_0(E) + \rho_{osc}(E)$. Dabei lässt sich $\rho_0(E)$ über die Weyl-Formel bestimmen. Der oszillierende Anteil ρ_{osc} kann als Summe von Beiträgen klassischer periodischer Bahnen p des Billards geschrieben werden:

$$\rho_{osc} = \sum_p A_p e^{ikL_p}$$

Eine Fouriertransformation dieser Formel liefert gerade Beiträge bei Längen die den periodischen Bahnen entsprechen. Man stelle die mitgegebene Fouriertransformation als Graph dar, berechne die Längen einiger kurzer periodische Bahnen des Billards (Skizze) und ordne den Peaks im Graphen der Fouriertransformierten die entsprechenden periodischen Bahnen zu.

Gut lässt sich z.B. der „Bouncing-Ball-Orbit“ bei der Länge finden, die gleich der doppelten Billardbreite ist. (Bouncing-Ball: Man stelle sich einen Ball vor, der parallel zur kürzeren Seite zwischen den Längsseiten des Rechtecks hin- und herläuft.)

Teil II

Man stelle die gemessenen Billard-Wellenfunktionen dar:

Entweder mittels Farben oder Graustufen ähnlich der Darstellung am Computer während des Versuchs und/oder (falls vorhanden) mit eigener oder kommerzieller Software als 3-D-Plot.

Die gemessene Rechteck- bzw. Halbkreis-Eigenfunktion bestimme man auch theoretisch, indem man die entsprechende Schrödinger- (bzw. Helmholtz-) Gleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes analytisch löst.

Man vergleiche die theoretischen Eigenenergien mit der Eigenenergie der gemessenen Wellenfunktion. Schließlich soll auch die analytisch erhaltene Wellenfunktion graphisch dargestellt und mit der experimentellen Wellenfunktion verglichen werden.

Anhang

a) Zustandsdichte

Die Zustandsdichte $\rho(E)$ eines Systems ist gegeben durch die Summe von Deltafunktionen an den Stellen der Eigenenergien E_i : $\rho(E) = \sum_i \delta(E - E_i)$.

Die integrierte Zustandsdichte $n(E) = \int_0^E \rho(x) dx$ lässt sich in zweidimensionalen Billards durch die Weyl-Formel annähern:

$$n_{\text{weyl}}(E) = (AE - U\sqrt{E})/4\pi; \quad A, U : \text{Billardfläche/-umfang}$$
$$E = k^2 = (2\pi\nu/c)^2; \quad (E \text{ ist bis auf einen konstanten Faktor analog zur}$$

Energie des entsprechenden quantenmechanischen Teilchens)

b) Abstandsverteilungen

In integrierbaren Systemen erwartet man bei der Abstandsstatistik eine

$$\textbf{Poisson-Verteilung: } P(s) = e^{-s},$$

und in nicht-integrierbaren Systemen eine

$$\textbf{Wigner-Verteilung: } P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\pi s^2/4},$$

wobei s der Abstand zwischen zwei normierten Eigenenergien durch ($s_i = n_{\text{weyl}}(E_i) - n_{\text{weyl}}(E_{i+1})$) gegeben ist und somit der mittlere Abstand s auf 1 normiert ist. In beiden Verteilungen ist die Gesamtwahrscheinlichkeit auf 1 normiert.

[1] *Experimente zum Quantenchaos*. Naturwissenschaften **79**, 443 (1992).

[2] *“Quantum” Chaos in Billiards Studied by Microwave Absorption*. Physical Review Letters **64**, 2215 (1990).

[3] *Experimental Determination of Billiard Wave Functions*. Physical Review Letters **68**, 2867 (1992).

Experimente zum Quantenchaos

Hans Jürgen Stöckmann

Fachbereich Physik der Universität,
W-3550 Marburg, FRG

Over the past 20 years chaos research has developed into one of the main research areas of physics. Whereas classical chaos was studied by both experimentalists and theorists, the study of the quantum mechanical behavior of classically chaotic systems, the so-called quantum chaos, was an exclusive domain of theoretical physics until a short time ago. This article shows that experimentalists, too, can contribute to this field. Topics of research are differently shaped billiards. In the experiments the billiards are replaced by correspondingly shaped resonators. The eigenfrequencies are determined by resonance absorption, taking advantage of the equivalence of time-independent Schrödinger and wave equations. In flat microwave resonators even a one-to-one correspondence exists between Schrödinger and Maxwell equations.

Warum Chladni-Figuren heute noch von Interesse sind

Zu den wenigen Forschern, die mit ihren Experimenten nicht nur die Wissenschaftler, sondern auch die interessierte Öffentlichkeit faszinierten, gehörte zweifellos Ernst F. F. Chladni mit den nach ihm benannten Klangfiguren. Dies verhalf ihm anlässlich eines längeren Paris-Aufenthalts im Jahre 1808 zu einer Einladung in die Tuilerien, wo er an einem Februarabend die Gelegenheit hatte, vor Napoleon und einem illustren Publikum seine Experimente vorzuführen. Die physikalische Erklärung der Klangfiguren stand zu jener Zeit noch aus, was den Kaiser veranlaßte, einen Preis von 3 000 Franc für die Entwicklung der zugehörigen mathematischen Theorie auszusetzen. Der Preis wurde im Jahre 1816 der Mathematikerin Sophie Germain zuerkannt, auch wenn ihre Lösung des Problems noch unvollkommen war (die Schwierigkeiten, mit denen in der damaligen Zeit eine Frau zu kämpfen hatte, um als Naturwissenschaftlerin anerkannt zu werden, wurden kürzlich in [1] dargestellt). Die vollständige Erklärung der Klangfiguren für kreisförmige Scheiben gelangt erst Robert Kirchhoff im Jahre 1850 (alle Angaben wurden dem Buch von F. Melde über das Leben von Chladni entnommen, das auch die Wiedergabe eines Berichts von Chladni über seinen Paris-Aufenthalt enthält [2]). Für unregelmäßig geformte Platten gelang die Lösung des Problems im vergangenen Jahrhundert nicht, wenn auch bereits bekannt war, daß „eine Scheibe, sie mag eine äußere Begrenzung haben wie sie will, ein System von Partialtönen liefert, denen entsprechend die Scheibe auch ganz bestimmte Klangfiguren zeigt“ (zitiert aus [3]).

Diese Klangfiguren unregelmäßig geformter Platten sind der Grund dafür, daß man sich jetzt nach fast 200 Jahren wieder für diese Experimente interessiert. Die Motivation kommt dabei aus einer ganz anderen Rich-

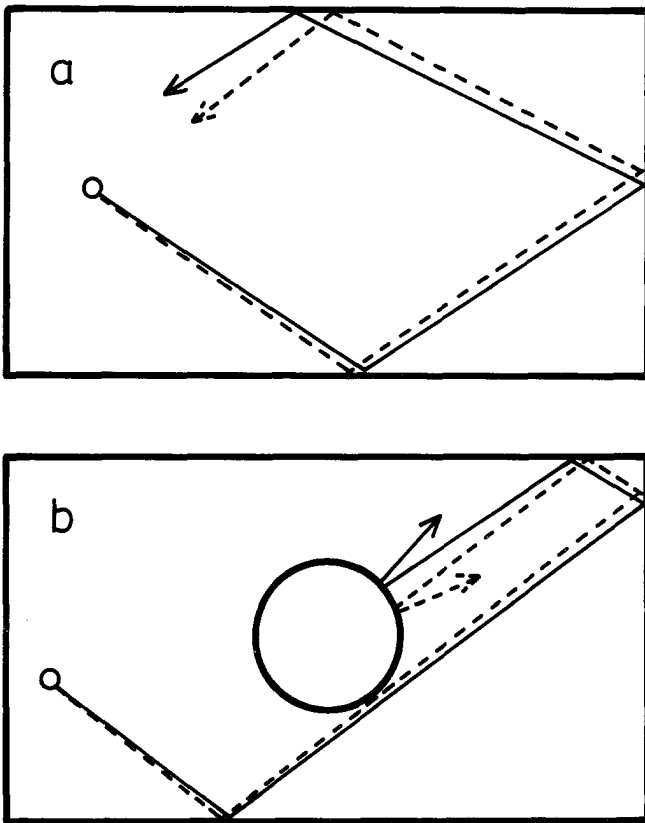


Fig. 1. In einem integrablen System wie dem Rechteckbillard (a) wachsen Unsicherheiten in den Anfangsbedingungen linear mit der Zeit, und die Trajektorien bleiben vorhersagbar. In dem nichtintegrablen Sinai-Billard (b) nehmen die Unsicherheiten dagegen exponentiell mit der Zeit zu, was zu einem chaotischen Verlauf der Trajektorien führt

tung, der Chaosforschung. Ein wichtiger Teilaspekt dieses Gebiets, das in den letzten Jahren einen gewaltigen Aufschwung erfahren hat, befaßt sich mit der Frage nach dem quantenmechanischen Verhalten klassisch chaotischer Systeme, dem „Quantenchaos“. Von Theoretikern viel untersuchte Modellsysteme sind hier die Billards. Zur Illustration sei ein rechteckiges Billard betrachtet, in dem sich ein einzelnes, als punktförmig angenommenes Teilchen reibungsfrei bewegt (Fig. 1 a). In einem solchen Billard gibt es zwei Konstanten der Bewegung, die Energie E des Teilchens und das Quadrat des Impulses in einer Richtung, z.B. p_x^2 , da sich bei jeder Reflexion nur das Vorzeichen einer Impulskomponente, nicht aber der Betrag ändert (p_y^2 ist dann keine zusätzliche unabhängige Konstante der Bewegung). Ein solches Billard ist integrabel, da die Zahl der Konstanten der Bewegung gleich der Zahl der Freiheitsgrade ist. Mögliche Unsicherheiten in den Anfangsbedingungen, z.B. der Richtung, wachsen nur linear mit der Zeit. Damit kann man die Trajektorien des Teilchens über lange Zeiträume mit beliebiger Genauigkeit vorhersagen, wenn nur die Anfangsbedin-

gungen hinreichend genau bekannt sind. Diese Situation ändert sich grundlegend, wenn man dem Billard eine unregelmäßige Form gibt, z.B. in der Mitte eine zusätzliche kreisförmige Bande einführt (Fig. 1 b). In einem solchen Sinai-Billard (genannt nach einem russischen Physiker, der diese Systeme viel studiert hat) gibt es nur noch eine Konstante der Bewegung, die Gesamtenergie E . Das System ist nicht-integrabel, die Unsicherheiten in den Anfangsbedingungen wachsen exponentiell, und es wird unmöglich, die Trajektorien über einen längeren Zeitraum vorherzusagen. In dieser Hinsicht verhält sich das Billard ähnlich wie das bekannte Doppelpendel, bei dem es in kritischer Weise von den Anfangsbedingungen abhängt, wann es zu einem Überschlag kommt.

Versucht man die klassische Betrachtung auf die Quantenmechanik zu übertragen, stößt man sofort auf Schwierigkeiten. Trajektorien im klassischen Sinn sind jetzt nicht mehr definiert, und die Vorgabe der Anfangsbedingungen findet ihre Grenze bei der Unschärferelation. Beim quantenmechanischen Vorgehen ist es zunächst einmal erforderlich, die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_n = E_n \psi_n$$

zu lösen, wobei die Eigenfunktionen auf dem Rand der Bedingung $\psi_n = 0$ genügen müssen. Aus den so berechneten Wellenfunktionen lassen sich durch Superposition Wellenpakete bilden,

$$\psi(r,t) = \sum_n a_n \psi_n(r) \exp(-\frac{i}{\hbar} E_n t).$$

Hat man das Wellenpaket einmal konstruiert, so kann man zu jedem späteren Zeitpunkt $\psi(r,t)$ berechnen. Für Chaos bleibt hier kein Raum mehr. Wir stehen vor der ungewöhnlichen Situation, daß in einem System, in dem die klassischen Trajektorien über längere Zeiträume unvorhersagbar sind, die Quantenmechanik über beliebig lange Zeiten klare Aussagen zuläßt (natürlich nur innerhalb der durch die Unschärferelation gesetzten Grenzen).

Eine Antwort auf die Frage nach den quantenmechanischen Eigenschaften klassisch chaotischer Systeme findet man auf diesem Wege nicht. Es bleibt nur die Möglichkeit, sich die quantenmechanischen Eigenwerte und Eigenfunktionen selber genauer anzusehen, und eben dies haben Theoretiker in den letzten zehn Jahren ausgiebig getan. Das Problem bei diesen Untersuchungen ist, daß die Lösung der Schrödinger-Gleichung für Billards mit unregelmäßiger Begrenzung numerisch sehr aufwendig ist. Besonders wenn Parameter-Abhängigkeiten studiert werden sollen (z.B. die Spektren von Sinai-Billard in Abhängigkeit vom Radius des zentralen Kreises), stoßen selbst moderne Großrechner rasch an ihre Grenzen.

So kommt es, daß auf einem Gebiet, das für Theoretiker reserviert schien, der Experimentalphysiker noch Beiträge liefern kann. Die grundlegende Idee beim experimentellen Zugang ist die mathematische Äquivalenz von zeitunabhängiger Schrödinger-Gleichung und zeitunabhängiger Wellengleichung,

$$\Delta \psi_n = -k_n^2 \psi_n,$$

der Helmholtz-Gleichung (da sich die Randbedingungen i. a. unterscheiden, ist diese Äquivalenz allerdings in der Regel nicht vollständig). Die Wellenzahl k_n hängt mit Frequenz ν_n über die Beziehung $k_n = 2\pi\nu_n/c$ zusammen. Ersetzt man also die Billards durch entsprechend geformte Resonatoren, so kann man durch Resonanzanregung die Eigenfrequenzen vermessen und über die oben diskutierte Äquivalenz den Zusammenhang zur Quantenmechanik herstellen.

Als erstes denkt man hier an die Eigenschwingungen von Metall- oder Glasplatten, und damit sind wir wieder bei den Chladni'schen Klangfiguren (tatsächlich genügen die Schwingungen von Platten nicht der Helmholtz-Gleichung, sondern der etwas anderen Gleichung $(\Delta)^2\psi_n = k_n^4\psi_n$ [4]; dieser Unterschied ist aber für die folgende Diskussion unerheblich). Zur Illustration des qualitativen Unterschieds zwischen integralen und nichtintegralen Billards zeigt Fig. 2 Chladni-Figuren für drei verschieden geformte Billards. Für eine im Zentrum eingespannte Kreisscheibe bilden die Knotenlinien ein regelmäßiges Netz von sich schneidenden Kreisen und Geraden (Fig. 2 a). Sie legen gewissermaßen ein Koordinatensystem auf die Platte. Fig. 2 b zeigt eine Chladni-Figur für eine im Zentrum eingespannte rechteckige Platte. Die Einspannung in der Mitte macht sich bei den niedrigsten Eigenschwingungen kaum bemerkbar, führt aber bei höheren Frequenzen dazu, daß sich die Knotenlinien nicht mehr schneiden, sondern aneinander vorbeilaufen. Solche Systeme werden als pseudointegrabel bezeichnet, und wir werden auf sie später noch einmal zurückkommen. Fig. 2 c schließlich zeigt eine Chladni-Figur für ein gevierteltes Sinai-Billard. Man beobachtet mäandrische Knotenlinien, die am Rand starten und enden. Bei manchen Eigenschwingungen findet man auch in sich geschlossene Kurven, Kreuzungen von Knotenlinien treten nicht mehr auf. Dieses Verhalten ist typisch für nichtintegrable Billards und wurde erstmalig in Rechnungen von McDonald und Kaufman beobachtet [5]. Das Verhalten der Knotenlinien von Billard-Wellenfunktionen wird in [6] ausführlich diskutiert. Ein weiteres einfaches Analogexperiment wurde mit Wasserwellen an der Oberfläche von flachen Schalen unterschiedlicher Form durchgeführt, die von außen periodisch angestoßen wurden [7].

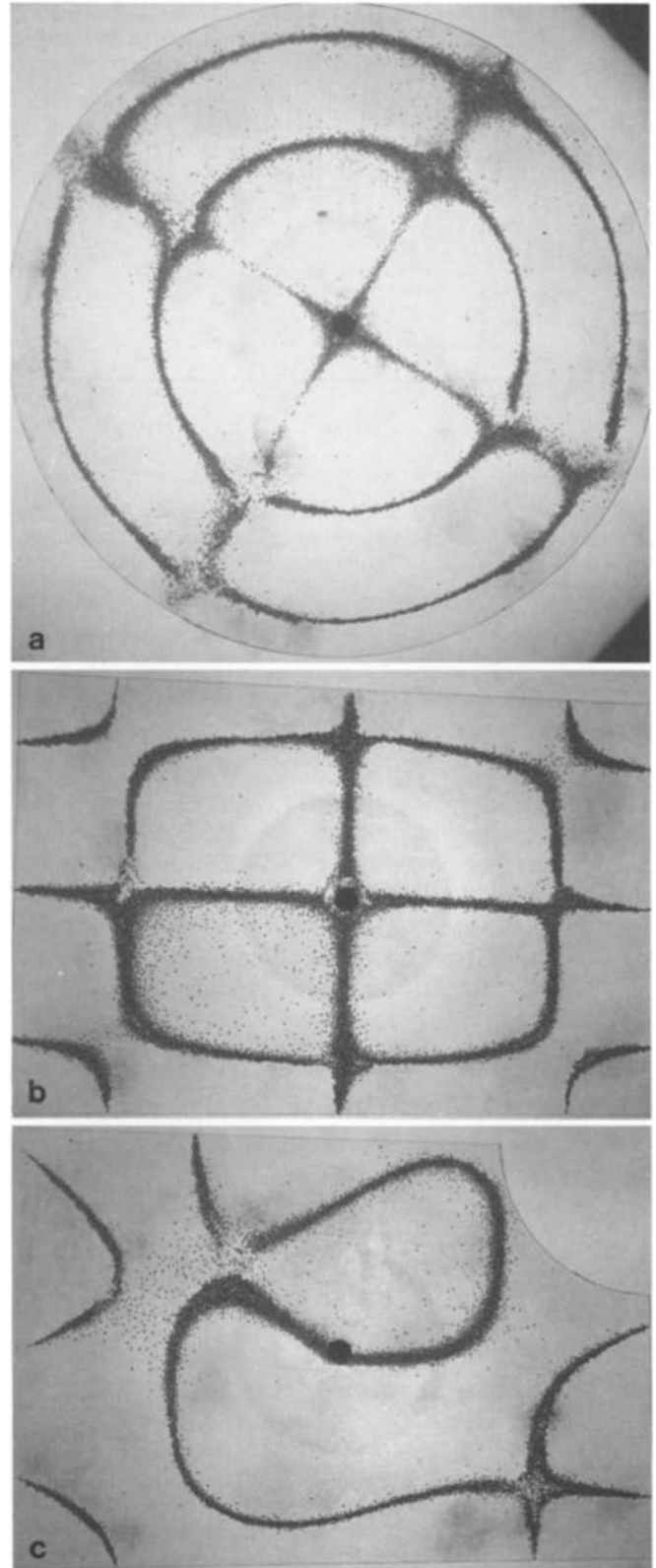


Fig. 2. Chladni-Figuren für unterschiedlich geformte Glasplatten. Alle Platten waren in der Mitte auf einem Ständer montiert und wurden mit einem Lautsprecher zu Schwingungen angeregt. Die gezeigten Platten entsprechen a) integralen, b) pseudointegralen und c) nichtintegralen Billards (Photos: K.-H. Kretschmer)

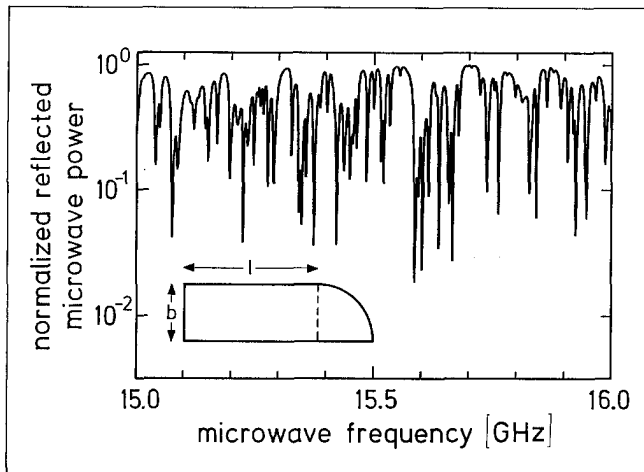


Fig. 3. Ausschnitt aus dem Eigenfrequenz-Spektrum eines Mikrowellenresonators von der Form eines geviertelten Stadions-Billards. Jedes Minimum in der Reflexion entspricht einer Resonator-Eigenfrequenz (aus [11])

Wie mit Mikrowellen die Quantenmechanik simuliert werden kann

Die geschilderten Experimente ermöglichen es, schon mit Mitteln der Schulphysik den qualitativen Unterschied zwischen integrablen und nichtintegrablen Billards zu demonstrieren. Sie sind aber wohl nicht für quantitative Aussagen geeignet. Hier bieten sich Messungen an Mikrowellenresonatoren als Alternative an. Die Mikrowellenmeßtechnik ist weit entwickelt, und Meßsysteme für den Frequenzbereich von 0 bis 25 GHz sind käuflich erhältlich. Die entsprechenden Wellenlängen liegen im cm-Bereich, und die zugehörigen Resonatoren sind einfach und billig herzustellen. Die Eigenfrequenzen der Resonatoren können durch Mikrowellenreflexion vermessen werden. Figur 3 zeigt einen Ausschnitt aus dem Spektrum eines Billards mit der Form eines geviertelten Stadions. Jedes Minimum in der Reflexion entspricht der Anregung einer Eigenfrequenz. Der verwendete Resonator hatte eine Höhe von $d = 8$ mm. Eine elementare Rechnung zeigt, daß für Frequenzen kleiner $\nu_{\max} = 2d/c$ die Billards quasi-zweidimensional sind. Die elektrischen Feldlinien laufen dann senkrecht vom Boden zum Deckel des Resonators, und die elektromagnetischen Randbedingungen reduzieren sich auf die einzige Forderung, daß das elektrische Feld am äußeren Rand des Resonators verschwindet. Für diesen Fall sind also Schrödinger-Gleichung und elektromagnetische Wellengleichung vollständig äquivalent, einschließlich der Randbedingungen! Dabei entspricht die elektrische Feldstärke der Wellenfunktion, das Quadrat der Frequenz bis auf einen Zahlenfaktor der quantenmechanischen Eigen-

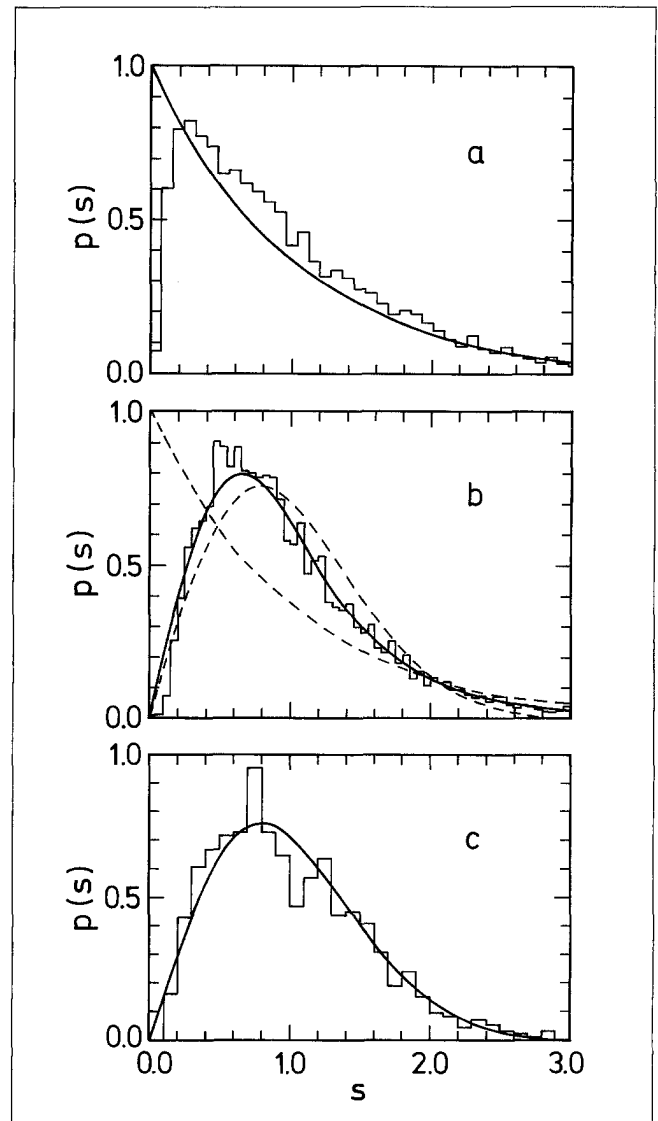


Fig. 4. Energieabstandsverteilungen für ein Rechteckbillard im Frequenzbereich 5 – 10 GHz (a), 15 – 18 GHz (b) und für ein Stadionsbillard (c) (aus [9, 11]). Die durchgezogenen Kurven entsprechen den Erwartungen für integrable, pseudointegrable und nichtintegrable Systeme. Die Abstandsverteilung für pseudointegrable Systeme liegt zwischen denen für integrable und nichtintegrable Systeme (gestrichelte Linien in b)

energie. Die Tiefe einer Resonanz ist ein Maß für die Amplitude des elektrischen Felds an der Einkoppelstelle der Mikrowellen. Durch Variation der Einkoppelstelle kann man also für jede Resonanz das elektrische Feld zweidimensional abtasten. Im Sinne der oben diskutierten Äquivalenz werden auf diese Weise auch quantenmechanische Wellenfunktionen der Messung zugänglich.

Um so chaotisch aussehende Spektren wie die in Fig. 3 auszuwerten, kann man auf vor etwa 30 Jahren in der Kernphysik entwickelte Methoden zurückgreifen. Es zeigte sich damals, daß die Verteilung der Abstände

aufeinanderfolgender Eigenwerte, $s_n = E_n - E_{n-1}$, eine geeignete Größe ist, um zwischen integrablen und nichtintegrablen Systemen zu unterscheiden. Zur Illustration zeigt Fig. 4 einige experimentell bestimmte Abstandsverteilungen. Wie oben erläutert, entspricht die quantenmechanische Energie E_n dem Quadrat der Eigenfrequenz ν_n^2 im Mikrowellenanalogon. Daher sind in Fig. 4 die Verteilungen für die Größe $s_n = \nu_n^2 - \nu_{n-1}^2$ dargestellt und alle Abstände auf einen mittleren Abstand $\langle s \rangle = 1$ normiert. Figur 4a zeigt eine Abstandsverteilung für ein Rechteckbillard im Frequenzbereich 5–10 GHz. Wie man sieht, genügen die Abstände sehr gut einer Poisson-Verteilung

$$p(s) = \exp(-s).$$

Dies bedeutet, daß die Eigenwerte unkorreliert sind, ein für integrable Systeme typisches Verhalten [8] (der Schwund bei kleinen Abständen ist experimentell bedingt; Ursache ist die endliche Breite der Resonanzen, die die Auflösung auf einige MHz begrenzt). Tatsächlich ist das Billard nicht wirklich integrabel, da der Draht, mit dem die Mikrowellen in den Resonator eingekoppelt werden, eine unvermeidliche Störquelle ist. Dadurch liegt in Wirklichkeit ein pseudointegrables System vor. Wie schon bei den Chladni-Figuren macht sich diese Störung aber erst bei höheren Frequenzen bemerkbar. Tatsächlich weicht die Abstandsverteilung mit zunehmender Frequenz immer stärker von der Poisson-Verteilung ab, und im Frequenz-Bereich 15–18 GHz beobachtet man das in Fig. 4b gezeigte Abstandshistogramm [9]. Die durchgezogene Kurve wurde aus Rechnungen für ein Rechteckbillard mit deltaförmiger Störung erhalten [10]. Man beobachtet eine vollständige Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie. Für nichtintegrablen Billards schließlich findet man eine Wigner-Verteilung [11]

$$p(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right)$$

(Fig. 4c). Die Nichtintegrabilität führt also zu einer Abstoßung zwischen den Eigenwerten und der Tendenz, bevorzugt einen mittleren Abstand einzunehmen. Dieses Verhalten findet seine Erklärung in der Theorie der Spektren großer Zufallsmatrizen, die sich zur Modellierung chaotischer Systeme sehr gut bewährt haben [12]. Wigner-Verteilungen sind für nichtintegrablen Systeme universell. Man beobachtet sie in Spektren von Atomkernen [13] und Molekülen [14] sowie bei chaotischen Streuprozessen [15]. In Billards wurden sie erstmalig in Rechnungen von Bohigas und Mitarbeitern gefunden [16].

Quantenmechanik und klassische Trajektorien

Die Universalität der Abstandsverteilungen ermöglicht es, auf schnelle und einfache Weise zu entscheiden, ob ein integrables oder ein nichtintegrables System vorliegt. Allerdings verzichtet man dabei auf jede individuelle Information. Ein anderer Weg zur Erklärung der Spektren greift gerade auf individuelle Systemeigenschaften zurück. Eine entscheidende Rolle spielen dabei die klassischen periodischen Bahnen. Beispiele dafür sind die Kepler-Ellipsen von Planeten beim Umlauf um die Sonne (allerdings nur in den Grenzen der Zweikörpernäherung und der Newtonschen Gravitationstheorie). Auch in nichtintegrablen Systemen gibt es periodische Bahnen, sie sind aber in der Regel instabil. Dies gilt z.B. beim Sinai-Billard für jede periodische Bahn, die den zentralen Kreis berührt.

Zur Illustration der zentralen Bedeutung der periodischen Bahnen zeigt Fig. 5a die Wellenfunktion für drei Stadion-Eigenfrequenzen [17]. Sie wurden mit dem oben beschriebenen Verfahren experimentell vermessen. Die in Fig. 5a dargestellte Wellenfunktion erlaubt eine unmittelbare Interpretation. Sie entspricht einer stehenden Welle zwischen den Längsseiten des Stadions, klassisch einem Teilchen, das zwischen diesen Seiten hin und her reflektiert wird. Diese periodische Bahn hat in der englischsprachigen Literatur den Namen „bouncing ball“-Orbit erhalten. Auch die in Fig. 5b und 5c gezeigten Wellenfunktionen lassen sich mit periodischen Bahnen in Verbindung bringen, nämlich der „Doppelraute“ und der „Flüstergalerie“ (einer ganzen Schar periodischer Bahnen, die sich der Rundung des Stadions mehr oder weniger anschmiegen). Alle gezeigten Wellenfunktionen weisen dort besonders hohe Amplituden auf, wo auch die klassischen Trajektorien verlaufen, wohingegen in den klassisch nicht berührten Bereichen die quantenmechanischen Wellenfunktionen niedrige Amplituden haben. Diese Strukturen wurden von Heller als „Narben“ („scars“) bezeichnet [18].

Die zentrale Bedeutung der periodischen Bahnen wurde zuerst von Gutzwiller erkannt [6]. Unter Verwendung semiklassischer Näherungen, d.h. im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$, konnte er einen Zusammenhang zwischen dem quantenmechanischen Spektrum und den klassischen periodischen Bahnen herstellen. In Billards ergibt sich dabei für die spektrale Dichte

$$\varrho(\nu) = \sum_n \delta(\nu - \nu_n) = \sum_r \varrho_r \exp(2\pi i \nu l_r / c - i n_r \pi).$$

Die erste Summe geht über alle Eigenfrequenzen, die zweite über alle periodischen Bahnen, wobei Mehr-

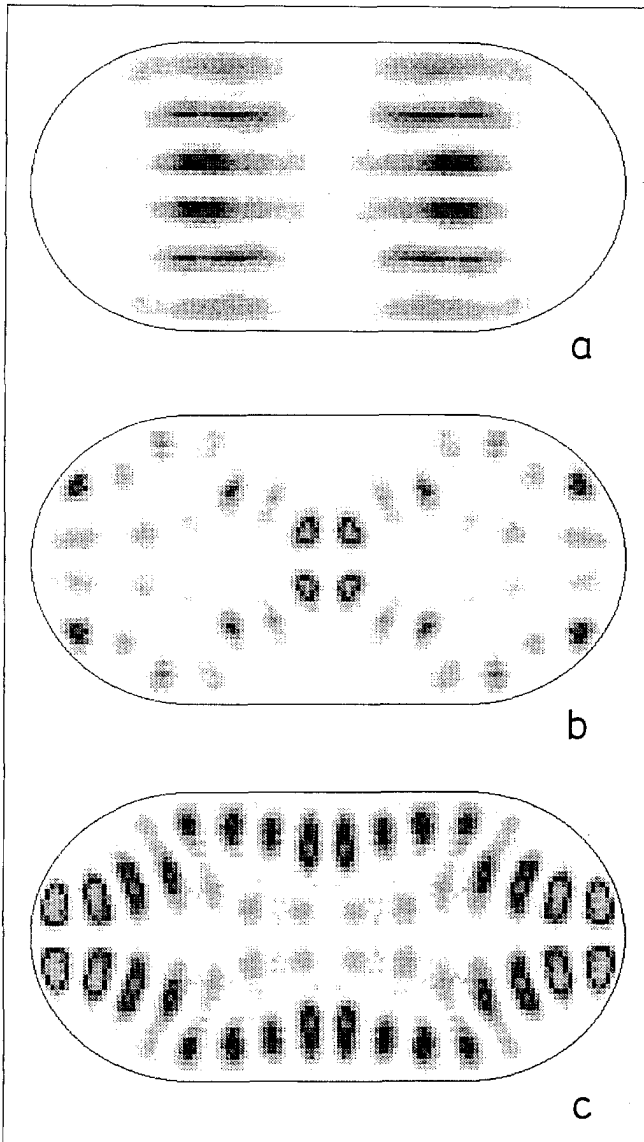


Fig. 5. Experimentell bestimmte Eigenfunktionen für ein Stadion-Billard. Alle gezeigten Wellenfunktionen lassen einen Zusammenhang mit klassischen periodischen Bahnen erkennen (aus [17])

fachdurchläufe gesondert zu berücksichtigen sind, q_r ist ein Gewichtungsfaktor, der die Stabilität der Bahn berücksichtigt, l_r die Länge der Bahn, n_r die Zahl der Reflexionen. Bemerkenswert an dieser Formel ist, daß das quantenmechanische Spektrum (im semiklassischen Grenzfall) allein durch die klassischen periodischen Bahnen bestimmt ist, die doch nur einen unmeßbar kleinen Anteil aller Bahnen in nichtintegrablen Systemen ausmachen!

Danach sollte die Fourier-Transformierte von $q(\nu)$,

$$\hat{q}(l) = \int q(\nu) \exp(-2\pi i \nu l/c) d\nu \sim \sum_n \exp(-2\pi i \nu_n l/c),$$

bei allen l -Werten Resonanzen aufweisen, die den Längen periodischer Bahnen entsprechen. Dies ist tatsäch-

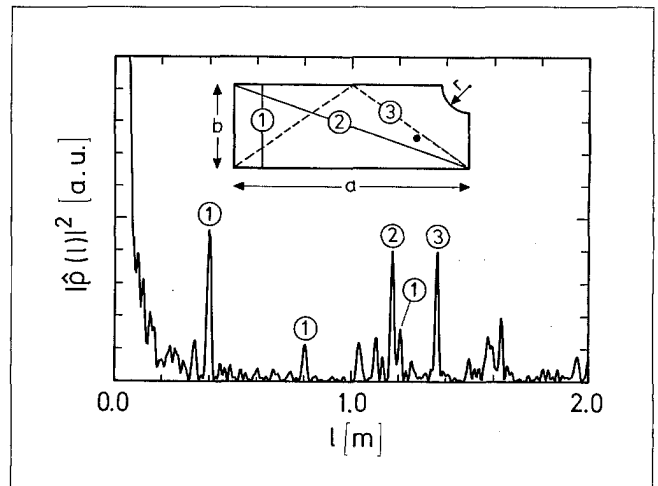


Fig. 6. Die Fourier-Transformierte des Spektrums eines geviertelten Sinai-Billiards zeigt Maxima bei allen Werten l , die der Länge klassischer periodischer Bahnen entsprechen (aus [11])

lich der Fall, wie Fig. 6 zeigt, in der $|\hat{q}(l)|^2$ für ein Sinai-Billard dargestellt ist. Jede der dort zu sehenden Resonanzen läßt sich einer periodischen Bahn zuordnen. Unter anderem sieht man hier den einfach und mehrfach durchlaufenen „bouncing ball“-Orbit, den es auch im Sinai-Billard gibt.

Im Grunde handelt es sich bei den Überlegungen von Gutzwiller um eine Verallgemeinerung der alten Idee von de Broglie aus der Anfangszeit der Quantenmechanik, wonach von allen möglichen klassischen periodischen Bahnen nur diejenigen einen Beitrag zum quantenmechanischen Spektrum liefern, bei denen auf einem vollen Umlauf eine ganze Zahl von de-Broglie-Wellenlängen Platz hat. Dieses Bild vor Augen erhalten die in Fig. 5 dargestellten Wellenfunktionen eine besonders suggestive Interpretation. Daß es tatsächlich möglich ist, durch Aufsummation aller periodischen Bahnen das quantenmechanische Spektrum zu erhalten, wurde in zwei kürzlich erschienenen Arbeiten demonstriert [19, 20]. Das Problem bei derartigen Rechnungen ist, daß die Summe über die periodischen Bahnen hochgradig divergent ist und erst durch geschicktes Umstellen der Terme konvergent gemacht werden muß.

Ein kurzer Ausblick soll diesen Bericht abschließen. Zum Teil angeregt durch unsere Messungen [21, 22], zum Teil unabhängig davon [23, 24] wurden in den letzten Jahren an mehreren anderen Stellen Experimente mit Mikrowellen begonnen, um quantenmechanische Systeme zu simulieren. In Darmstadt waren erste Versuche mit supraleitenden Kavitäten erfolgreich [25]. Ich denke, daß für die nächsten Jahre solche Analogexperimente ihren Platz neben den Rechnungen haben werden. Für bestimmte Systeme, die sich aufgrund ihrer Komplexität der Berechenbarkeit noch

entziehen, wie z.B. dreidimensionale Billards oder ungeordnete Gitter [24], dürften Experimente sogar bis auf weiteres konkurrenzlos bleiben.

Mein Dank gebührt in erster Linie J. Stein, der für die Durchführung und die Auswertung der hier dargestellten Experimente verantwortlich war. Wertvolle theoretische Unterstützung erhielt ich von Prof. S. Großmann und Dr. B. Eckhardt. Beim Aufbau des Experiments zu den Chladni-Figuren half mir K.-H. Kretschmer. Prof. W. Fischer verdanke ich den Hinweis auf die historischen Zitate. Die Experimente wurden von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 185 „Nichtlineare Dynamik“ gefördert.

1. Dalmedico, A. D.: Sci. Am. Dez. 1991, S. 76
2. Melde, F.: Chladni's Leben und Wirken. Marburg: Elwert'sche Verlagsbuchhandlung 1888
3. Melde, F., in: Handbuch der Physik, S. 732 (Hrsg. A. Winkelmann). Breslau: Trewent 1891
4. Landau, L. D., Lifschitz, E. M.: Elastizitätstheorie, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VII, § 25. Berlin: Akademie-Verlag 1966
5. McDonald, S. W., Kaufman, A. N.: Phys. Rev. Lett. 42, 1189 (1979)
6. Gutzwiller, M. C.: Chaos in Classical and Quantum Mechanics, Kap. 15. New York: Springer 1990
7. Blümel, R., Davidson, I. H., Reinhard, W. P., Lin, H., Sharnoff, M.: Phys. Rev. A 45, 2641 (1992)
8. Berry, M. V., Tabor, M.: Proc. R. Soc. Lond. A 349, 101 (1976)
9. Haake, F., Lenz, G., Šeba, P., Stein, J., Stöckmann, H.-J., Życzkowski, K.: Phys. Rev. A 44, R 6161 (1991)
10. Šeba, P.: Phys. Rev. Lett. 64, 1855 (1990)
11. Stöckmann, H.-J., Stein, J.: ibid. 64, 2215 (1990)
12. Haake, F.: Quantum Signatures of Chaos. Heidelberg: Springer 1991
13. Porter, C. E.: Statistical Theories of Spectra: Fluctuations. New York: Academic Press 1965
14. Zimmermann, Th., Köppel, H., Cederbaum, L. S., Persch, G., Demtröder, W.: Phys. Rev. Lett. 61, 3 (1988)
15. Blümel, R., Smilansky, U.: Physica D36, 111 (1989)
16. Bohigas, O., Giannoni, M. J., Schmit, C.: Phys. Rev. Lett. 52, 1 (1984)
17. Stein, J., Stöckmann, H.-J.: ibid. 68, 2867 (1992)
18. Heller, E. J.: ibid. 53, 1515 (1984)
19. Sieber, M., Steiner, F.: ibid. 67, 1941 (1991)
20. Tanner, G., Scherer, P., Bogomolny, E. B., Eckhardt, B., Wintgen, D.: ibid. 67, 2410 (1991)
21. Doron, E., Smilansky, U., Frenkel, A.: ibid. 65, 3072 (1990)
22. Sridhar, S.: ibid. 67, 785 (1991)
23. Yablonoivitch, E., Gmitter, T. J.: ibid. 63, 1950 (1989)
24. McCall, S. L., Platzmann, P. M., Dalichaouch, R., Smith, D. R., Schultz, S.: ibid. 67, 2017 (1991)
25. Gräf, H.-D., Harney, H. L., Lengeler, H., Lewenkopf, C. H., Rangacharyulu, C., Richter, A., Schardt, P., Weidenmüller, H. A.: (z. Veröff. eingereicht)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

VOLUME 64

7 MAY 1990

NUMBER 19

“Quantum” Chaos in Billiards Studied by Microwave Absorption

H.-J. Stöckmann and J. Stein

Fachbereich Physik, Universität Marburg, D-3550 Marburg, West Germany

(Received 2 February 1990)

The eigenfrequencies of resonance cavities shaped as stadium or Sinai billiards are determined by microwave absorption. In the applied frequency range 0–18.74 GHz the used cavities can be considered as two dimensional. For this case quantum-mechanical and electromagnetic boundary conditions are equivalent, and the resonance spectrum of the cavity is, if properly normalized, identical with the quantum-mechanical eigenvalue spectrum. Spectra, containing up to a thousand eigenfrequencies, are obtained within minutes. Statistical properties of the spectra as well as their correlation with classical periodic orbits are discussed.

PACS numbers: 05.45.+b

The statistical properties of the eigenvalue spectrum of a Hamiltonian of a quantum system change in a characteristic way if the corresponding classical system shows a transition from integrable to nonintegrable behavior. Whereas in integrable systems for the distribution of energy differences of successive eigenenergies Poisson statistics is observed, the spectra of nonintegrable systems obey Wigner statistics. Experimentally, Wigner statistics were already observed many years ago in the spectra of highly excited nuclei,¹ a very recent example is given by the optical fluorescence spectra of NO₂ molecules.² Intense theoretical studies exist for the periodically kicked top,^{3,4} nonlinearly coupled oscillators,^{5,6} and billiards of different shapes.^{7,8} Pechukas⁹ and Yukawa¹⁰ showed that the strength of the nonintegrable part of the Hamiltonian may be interpreted as a pseudotime. As a function of this “time,” the eigenenergies move on the energy axis in a similar way as the particles of an interacting one-dimensional gas.

An alternative approach to the understanding of the statistics of eigenvalues is opened by the semiclassical approximation. Gutzwiller¹¹ showed that the density of eigenvalues $\rho(E)$ can be decomposed into a monotonic and an oscillatory part,

$$\rho(E) = \rho_0(E) + \sum_{\gamma} \rho_{\gamma} \cos[(1/\hbar)S_{\gamma} - \phi_{\gamma}] \quad (1)$$

(see also Ref. 12 for a review). In the case of two-

dimensional billiards, the monotonic part $\rho_0(E)$ is given by¹³

$$\rho_0(E) = \frac{A}{4\pi} - \frac{L}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{E}} + \dots, \quad (2)$$

where A is the area and L is the circumference of the billiard (the units were chosen such that $\hbar^2/2m=1$, i.e., $E=k^2$, where k is the de Broglie wave number of the particle). The oscillatory part of $\rho(E)$ in Eq. (1) is a sum over all classical periodic orbits γ . S_{γ} is the classical action for the orbit. The prefactor ρ_{γ} and the phase ϕ_{γ} can be calculated within the frame of the semiclassical approximation. If the action S_{γ} is proportional to a power of E , then the contributions from the different periodic orbits to $\rho(E)$ can be obtained by a Fourier transformation of the spectrum as was demonstrated by Wintgen.¹⁴ The classical periodic orbits show further up in so-called “scars,” regions of extra high amplitudes of some eigenfunctions in the neighborhood of periodic orbits.^{15,16}

Calculations of eigenvalues of nonintegrable Hamiltonians are extremely time consuming even on modern computers. Probably for this reason in all publications mentioned above the total number of eigenvalues calculated for one system was of the order of at most several hundred. Parameter dependences have been studied only over very limited regions. In billiards only two-dimensional systems have been studied up to now. Infor-

mation on the eigenfunctions is even more scarce.

It is shown in this Letter that even in a time of rapidly growing computer capabilities an experimental approach to the problem may be an attractive alternative. Our experiment uses the fact that the time-independent Schrödinger equation and the wave equation are mathematically equivalent (apart from the boundary conditions which may be different). The billiards are substituted by suitably shaped resonators, whose eigenfrequencies are measured. There are several alternatives for an experimental realization, such as vibrating plates, optical resonators, and microwave resonators. Several authors^{17,18} proposed the use of optical waveguides to simulate kicked quantum systems. For the simulation of billiards the use of microwave cavities seemed most promising to us for the following reasons: (i) Microwave generators for a wide frequency range in the GHz region and network analyzers for the registration of eigenfrequencies are commercially available, (ii) the construction of cavities with sizes in the cm range is easy and inexpensive, and (iii) it is no problem to obtain resonator qualities Q of the order of several thousands. With a somewhat greater effort even qualities of several ten thousands are obtainable. Interestingly enough, the same approach was used already 35 years ago to mimic the *acoustic* properties of rooms with the help of microwave cavities.¹⁹

The resonator quality Q in a frequency range of interest is defined as $Q = \nu/\Delta\nu$, where ν is an eigenfrequency in that range and $\Delta\nu$ is its typical width. The main cause for the width is the loss of microwave energy in the walls of the resonator due to the skin effect. For microwave frequencies of about 10 GHz typical skin depths for a good metallic conductor such as brass, which was used in the present experiments, are of the order of 1.5 μm . Two successive eigenfrequencies can just be resolved, if they are separated by at least $\Delta\nu$. A simple calculation shows that the total number of eigenfrequencies which can be registered is of the order of Q .

In our experiments we use a Hewlett-Packard microwave generator HP 8350 B together with a scalar network analyzer HP 8757 A. The frequency could be varied between 0.01 and 26.5 GHz. The microwaves were transmitted to the resonator through a microwave cable; the reflected microwave power was measured as a function of frequency. Figure 1 shows part of a reflection spectrum for a stadium-shaped resonator. A spectrum as shown in Fig. 1 is registered within seconds. Typical times to measure a spectrum over the full frequency range including signal averaging and data transfer to an attached computer amount to about half an hour. In all resonators the top and the bottom face were parallel to each other with a distance of $d = 8$ mm. Thus for frequencies $\nu < \nu_{\text{max}} = c/2d = 18.74$ GHz the resonator can be considered as two dimensional. In all measurements described below only frequencies with $\nu < \nu_{\text{max}}$ were taken into account. In general, different

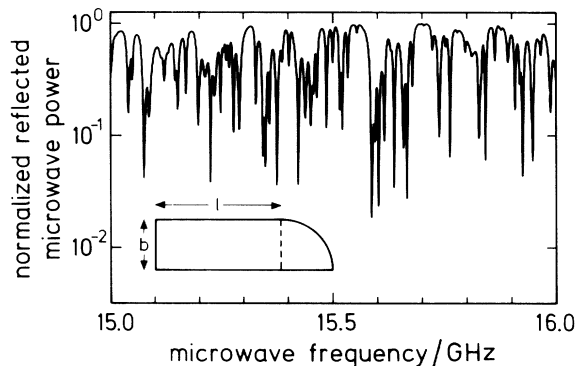


FIG. 1. Part of the spectrum of a stadium billiard ($b = 20$ cm, $l = 36$ cm). It was obtained by measuring the reflected microwave power as a function of the microwave frequency. Each resonance corresponds to an eigenfrequency of the billiard.

boundary conditions apply to quantum-mechanical and electromagnetic systems, respectively. Whereas in the quantum-mechanical case the wave function ψ must be zero at the boundary, in the electromagnetic case the tangential component E_{tang} of the electric field and the normal component B_{norm} of the magnetic induction must vanish at the boundary. For frequencies below ν_{max} only transverse magnetic modes are possible. Therefore in two-dimensional billiards the electromagnetic boundary conditions reduce to a single one, $E_z = 0$ on the boundary, where z is the direction perpendicular to the top and bottom faces of the resonator. Thus in the two-dimensional case quantum-mechanical and electromagnetic boundary conditions become identical, if one identifies ψ with E_z . Strictly speaking, E_{tang} is not exactly zero on the boundary because of the finite conductivity of the walls. This penetration of the electric field into the walls is the cause for the broadening of resonance lines and for the limited quality, as discussed above.

In the following we concentrate on one typical measurement for a Sinai billiard, rectangularly shaped with an excised quarter circle at one of the corners (see inset of Fig. 3). A total of 1002 eigenvalues was registered in the frequency range 1–18 GHz. It should be noted that in earlier calculations such as in Ref. 8 the total number of eigenvalues was only several hundred, even if the data of different billiards were combined. From the monotonic part $\rho_0(E)$ of the density of eigenvalues [see Eq. (2)] one would expect 1178 eigenvalues in the frequency range mentioned above. The loss of about 15% has two causes. First, the smallest distance which can be resolved because of the limited quality is about 3 MHz. This leads to a loss especially at small spacings, with increasing tendency at higher frequencies. Second, an eigenvalue may be overlooked in the reflection spectrum if the point where the microwave is coupled to the resonator is near a node of the eigenfunction (the depths of the

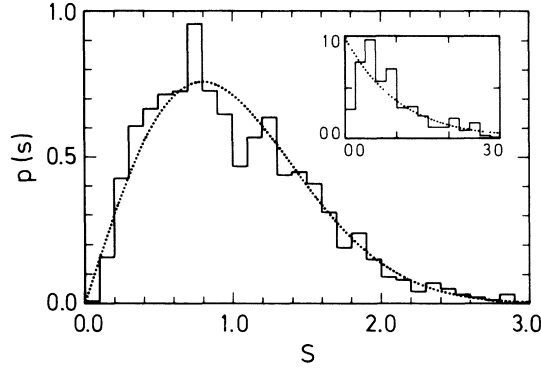


FIG. 2. Histogram for the distances s between successive eigenenergies for the Sinai billiard shown in the inset of Fig. 3. The dotted line corresponds to a Wigner distribution. Inset: The histogram of eigenfrequency distances for the rectangular billiard of the same size as the Sinai billiard. Now a Poisson distribution is observed. For the loss of eigenfrequencies at low distances see text.

resonances in Fig. 1 are proportional to the square of the amplitude of the microwaves at the point of coupling).

Figure 2 shows the histogram of the distribution of distances of successive eigenenergies $s_n = E_n - E_{n-1}$ for a Sinai billiard. The “energy” is defined by $E = k^2$, and as in the quantum-mechanical analog, it is not the photon energy; $k = 2\pi\nu/c$ is the wave number of the microwave frequency. The abscissa of the figure is normalized to the mean distance $\bar{s} = 1$. The dotted line corresponds to a Wigner distribution

$$p(s) = \frac{1}{2} \pi s \exp(-\frac{1}{4} \pi s^2). \quad (3)$$

The loss of eigenvalues at small distances mentioned above affects the lowest histogram value only. The inset of Fig. 2 shows the histogram of the distribution of eigenenergy distances for a rectangular billiard of the same size as the Sinai billiard. Now a Poisson distribution is observed, as it is expected for an integrable system. In this case only the 314 eigenfrequencies below 11 GHz were taken into account. For higher frequencies the spectrum showed more and more irregular behavior because of mechanical imperfections of the resonator.

Equation (1) shows that there is a close correspondence between eigenvalues and classical periodic orbits. For billiards the determination of periodic orbits is extremely simple, as only the laws of geometrical optics have to be obeyed. For the action of one special orbit one obtains $S_\gamma = \hbar k L_\gamma$, where L_γ is the length of the orbit. Therefore the Fourier transform of the density of eigenvalues, with k as the variable, i.e.,

$$\hat{\rho}(L) = \sum_n \exp(ik_n L), \quad (4)$$

where the sum is over all eigenfrequencies, should show resonances at all L values corresponding to lengths of classical periodic orbits [see Eq. (1)]. Figure 3 shows

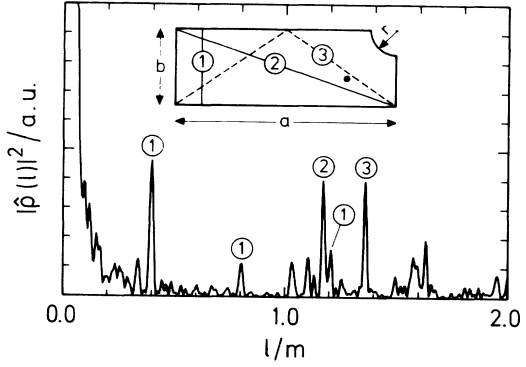


FIG. 3. Fourier transform of the spectrum of the Sinai billiard shown in the inset ($a = 56$ cm, $b = 20$ cm, $r = 7$ cm). The dot in the inset denotes the point where the microwaves were coupled to the resonator. Each resonance in the Fourier transform corresponds to a classical periodic orbit.

$|\hat{\rho}(L)|^2$ for the same Sinai billiard as above. The billiard is shown in the inset of the figure, together with some elementary periodic orbits. A great number of resonances is seen. All of them could be attributed to classical periodic orbits. The resonances corresponding to the orbits shown in the inset are marked by numbers. For the “bouncing-ball” orbit 1 also higher-order resonances corresponding to multiple orbits are seen.

The fact that eigenfrequencies can be determined in very short times makes it possible to determine spectra for a large number of billiards with varying irregularity parameter. This is particularly simple for the stadium billiard. We varied the length l of the billiard shown in the inset of Fig. 1 between $l = 0$ and 5 cm. A small part of the spectra is shown in Fig. 4. First, one observes an overall decrease of eigenfrequencies with increasing

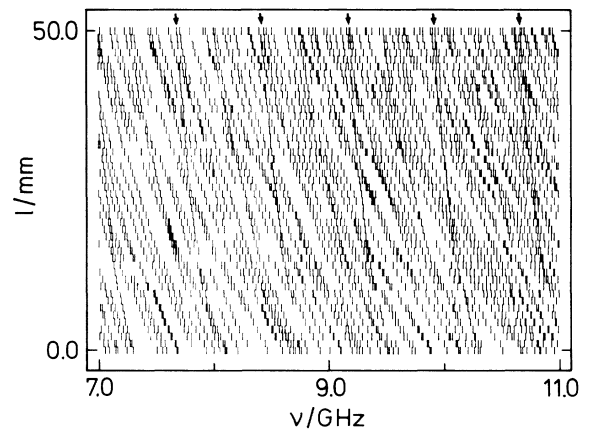


FIG. 4. Part of the spectra of different stadium billiards. The width of the billiard was fixed to $b = 20$ cm, the length l varied between 0 and 5 cm (see inset of Fig. 1). The periodic structures marked by arrows are due to eigenfrequencies associated with the “bouncing-ball” orbit.

length. This is a consequence of the fact that $\rho(E)$ is asymptotically proportional to the area of the billiard [see Eq. (2)]. The most conspicuous features of Fig. 4, however, are the regular patterns, marked by arrows at the upper margin of the figure. The distance of the frequency markers of $\Delta\nu=0.75$ GHz corresponds to a length of $\Delta l=c/\Delta\nu=40$ cm. This is exactly the length of the bouncing-ball orbit. The eigenfrequencies making up the periodic pattern therefore correspond to standing waves with node lines parallel to l . A somewhat more careful inspection of Fig. 4 shows that there are at least two further periodic patterns, with the same period length $\Delta\nu$, but with slopes differing from the slope of the pattern discussed above. The corresponding frequencies, too, must correspond to standing waves between the two long sides of the billiard, but with additional node lines parallel to the short side b . This example demonstrates that the correspondence between periodic orbits and eigenfrequencies can be seen even without performing a Fourier transform. Moreover, it is possible by direct inspection of the spectrum to associate part of the eigenfrequencies with specific periodic orbits. It is indispensable for this purpose, however, to plot the spectra for a large number of different l values together.

Though billiards represent only a small part of possible nonintegrable systems, they are especially suitable to study the close correspondence between spectra and classical periodic orbits. This work has shown that a great number of eigenvalues of billiards can be determined experimentally in very short times. A quantitative comparison with computations unfortunately is not possible to us as none of the publications mentioned in the beginning contains any information on computer time spent. In the experiments, contrary to the computations, the extension to three-dimensional systems is straightforward. Of course a price has to be paid. In the experiments it is unavoidable that part of the eigenvalues is overlooked, and one has to account for this fact if the statistical properties of the spectra are studied. If the correlation of the spectra with classical periodic orbits is considered, a loss of a few percent of the eigenvalues is probably of little relevance.

Future experiments will proceed in two directions: (i) continuation of the study of the dynamics of the eigenvalues under a change of the irregularity parameter of

the billiard; (ii) systematic variation of the point where the microwaves are coupled to the resonator, by this also detailed information on wave functions and scars should be obtainable; (iii) measurement of the spectra of three-dimensional billiards. In this case the electromagnetic system is no longer equivalent to the quantum-mechanical one, the correspondence between eigenfrequencies and periodic orbits, however, still holds.

We thank Professor Dr. S. Grossmann, Marburg, for many fruitful discussions and for a number of valuable suggestions to the manuscript. Dr. B. Eckhardt, Marburg, is thanked for pointing our attention to the correspondence between spectra and periodic orbits, and for many discussions on semiclassical approximation methods. This work was sponsored by the Deutsche Forschungsgemeinschaft.

¹*Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*, edited by C. E. Porter (Academic, New York, 1965).

²Th. Zimmermann, H. Köppel, L. S. Cederbaum, G. Persch, and W. Demtröder, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 3 (1988).

³F. Haake, M. Kus, and R. Scharf, *Z. Phys. B* **65**, 381 (1987).

⁴H. Frahm and H. J. Mikeska, *Z. Phys. B* **65**, 249 (1986).

⁵Th. Zimmermann, H. D. Meyer, H. Köppel, and L. S. Cederbaum, *Phys. Rev. A* **33**, 4334 (1986).

⁶J. Reichl and H. Büttner, *J. Phys. A* **20**, 6321 (1987).

⁷S. W. McDonald and A. N. Kaufmann, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1189 (1979).

⁸O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).

⁹P. Pechukas, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 943 (1983).

¹⁰T. Yukawa, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1883 (1985).

¹¹M. C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **8**, 1979 (1967).

¹²B. Eckhardt, *Phys. Rep.* **163**, 205 (1988).

¹³H. P. Baltes and E. R. Hilf, *Spectra of Finite Systems* (Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1976).

¹⁴D. Wintgen, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1589 (1987).

¹⁵E. J. Heller, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1515 (1984).

¹⁶E. B. Bogomolny, *Physica (Amsterdam)* **31D**, 169 (1988).

¹⁷J. Krug, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2133 (1987).

¹⁸R. E. Prange and S. Fishman, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 704 (1989).

¹⁹M. R. Schroeder, *J. Audio Eng. Soc.* **35**, 307 (1987); originally published in *Acustica* **4**, 456 (1954).

Experimental Determination of Billiard Wave Functions

J. Stein and H.-J. Stöckmann

Fachbereich Physik, Universität Marburg, D-W-3550 Marburg, Federal Republic of Germany

(Received 11 October 1991)

Wave functions of a stadium billiard are determined in a microwave analog experiment. It is shown that Gutzwiller's semiclassical representation of the Green's function in terms of classical trajectories can account not only for eigenvalue spectra but also for eigenfunction patterns.

PACS numbers: 05.45.+b

The perhaps most impressive way to demonstrate the qualitative difference between integrable and nonintegrable systems is the presentation of eigenfunction patterns of billiards. Whereas for a rectangular or circular billiard the nodal lines form a regular grid with a large number of crossings, for nonintegrable billiards the node lines perform meandric walks while avoiding any crossing (in the presence of degeneracies the crossings can be destroyed by suitable superpositions of eigenfunctions also in integrable billiards; for details see Chap. 15 of Ref. [1]). This was first demonstrated by McDonald and Kaufman [2] who calculated wave functions in a stadium billiard (a

more detailed account of this work can be found in Ref. [3]). A surprise was then the discovery by Heller that many wave functions are not distributed more or less uniformly over the whole billiard but form so-called scars, regions of extra high amplitudes near classical periodic orbits [4,5]. An approach to explain these scars was made by Bogomolny [6]. He used the fact that the Green's function,

$$G(q_A, q_B, E) = \sum_n \frac{\varphi_n^*(q_A) \varphi_n(q_B)}{E - E_n}, \quad (1)$$

can be expressed semiclassically as a sum over classically allowed trajectories [7],

$$G(q_A, q_B, E) \approx \frac{1}{i(2\pi i)^{1/2}} \sum_r |\Delta_r|^{1/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_r(q_A, q_B, E) - im_r \frac{\pi}{2} \right]. \quad (2)$$

In Eq. (1) E_n and $\varphi_n(q)$ denote eigenenergy and eigenfunction of the n th eigenvalue, respectively. In Eq. (2) the sum is over all trajectories starting at q_A and ending at q_B . $S_r(q_A, q_B, E)$ is the classical action for the trajectory, and m_r is the Maslov index counting the number of conjugated points. For billiards the action is given by $S(q_A, q_B, E) = \hbar k q$. Here q denotes the total length of the trajectory and $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ is the de Broglie wave number of the particle. The Maslov index is given by $m_r = 2n_r$, where n_r is the number of reflections (for a billiard with hard walls every reflection gives rise to a phase jump of π). The prefactor $|\Delta_r|^{1/2}$ entering into Eq. (2) takes into account the stability of the trajectory. Δ_r can be written as a Jacobian determinant,

$$\Delta_r = |\partial p_A^\alpha(q_A, q_B, E) / \partial q_B^\beta|, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (3)$$

where the p_A^α are the two components of the momentum at the starting point, written as functions of q_A, q_B, E , and q_B^β are the two components of the end position. Classically, Δ_r is proportional to the density of trajectories at point q_B starting isotropically from point q_A (a very readable account of these questions can be found in Ref. [8]).

Taking $q_A = q_B = q$ in Eq. (2) and integrating over q , one gets the Gutzwiller trace formula establishing a correspondence between periodic orbits and the quantum-mechanical spectrum. This correspondence could be demonstrated experimentally by the present authors for electromagnetic eigenfrequency spectra of billiard-shaped microwave resonators (Ref. [9], hereafter denoted by I).

In I the equivalence of the two-dimensional time-independent Schrödinger equation and the time-independent wave equation was used for an experimental determination of the quantum-mechanical eigenvalues. The question arose whether a similar determination of eigenfunctions was also possible. In fact, a first famous analog experiment of this type was performed already 200 years ago by E. F. Chladni who studied nodal patterns of vibrating plates. Even Chladni figures for irregular shapes were already observed in the last century but could not be interpreted at that time [10]. Figure 1 shows a modern Chladni figure on a glass plate with the shape of a quartered Sinai billiard. The meandric shape of nodal lines first observed by McDonald and Kaufman in their calculations on a stadium billiard can be observed already with this extremely simple device. Comparably simple is the experimental realization of wave chaos on water surfaces [11].

Both mentioned arrangements are very well suited for demonstration purposes but probably not for quantitative measurements. Here again billiard-shaped microwave resonators offer an alternative. It was shown in I that the microwave reflection from such resonators measured as a function of frequency shows minima whenever the irradiated frequency corresponds to an eigenfrequency of the resonator. The reflected microwave power is proportional to the energy density at the coupling wire, i.e., to the square of the electric-field strength. A scan of the cou-

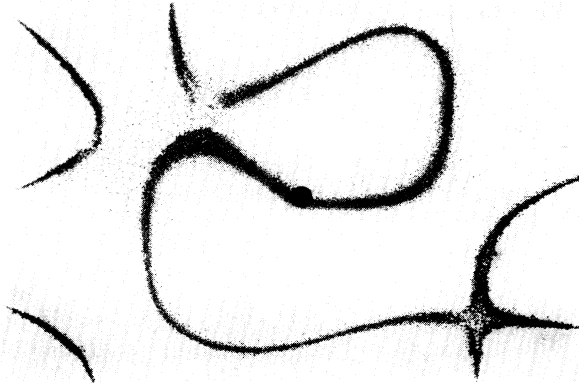


FIG. 1. Chladni figure on a glass plate of the shape of a quartered Sinai billiard ($a=21$ cm, $b=14$ cm, $r=5$ cm) is fixed in the center and excited to vibrations by a loudspeaker. The nodal lines of the vibrations are made visible by grains of semolina distributed over the plate. Typical vibration frequencies are in the range 100 to 2000 Hz.

pling wire over the area thus allows the determination of E^2 as a function of the position (in the present experiment a scalar network analyzer was used, with a vector network analyzer even the determination of the sign of E would be possible). Because of the one-to-one correspondence between E^2 and the absolute square of the quantum-mechanical wave function $|\varphi|^2$ a measurement of the reflected microwave power P as a function of frequency and position of the coupling wire yields directly the quantity

$$P(q, k) \sim \sum_n \frac{\lambda}{(E - E_n)^2 + \lambda^2} |\varphi(q)|^2 \sim \text{Im} G(q, q, E - i\lambda). \quad (4)$$

In Eq. (4) E corresponds to the square of the wave number $k = 2\pi\nu/c$, where ν is the microwave frequency. λ is the experimentally observed width of the resonances, limited because of the loss of microwave energy in the walls of the resonator [in reality λ differs from resonance to resonance; therefore Eq. (4) is only approximately correct].

The described procedure has one drawback. The very existence of the coupling wire modifies the spectrum of the resonator [12], and a displacement of the coupling wire leads to a shift of the resonances of up to several MHz. The maximum shift is observed at sites where the wave function takes its maximum value, whereas at the nodal lines the shift is zero. Therefore the nodal pattern is undisturbed by the measurement, whereas deviations are expected near the maxima of the wave functions.

The sketch of the experimental setup is shown in Fig. 2. The upper part of the resonator can be moved with respect to the ground plate. The coupling wire with a diameter of 0.5 mm enters through a hole in the ground plate. To improve the electrical contact between the two

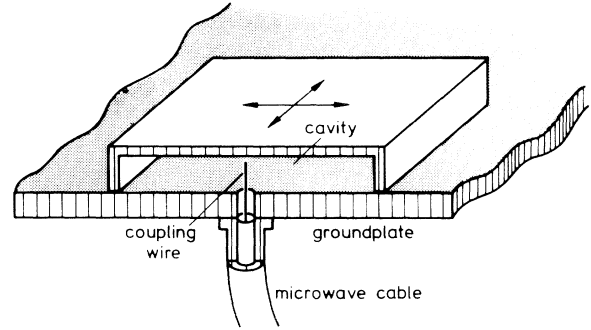


FIG. 2. Sketch of the experimental setup.

parts, an iron weight was placed upon the resonator. The quality figure of the resonator was about 2000, resulting in linewidths of several MHz. The microwave frequency was varied between 0.4 and 18 GHz using a Hewlett-Packard microwave generator 8350B; the reflected power was registered with a scalar network analyzer 8757A. The resonator had the shape of a quartered stadium (see Fig. 3). The position of the wire was scanned in steps of 0.5 cm in both directions yielding a total of 1555 pixels.

From the depths of the resonances the wave functions were obtained as described above. Up to now, wave functions for the first 80 eigenfrequencies were obtained. The shift of the resonances upon variation of the coupling wire complicates the reconstruction of the wave function for frequencies above 7 GHz, as here the shift comes into the order of magnitude of the distance between successive eigenvalues. As the measurements were performed in the quartered stadium only wave functions with odd-odd parity were registered. Figure 3 shows a selection of the results. The wave functions shown in Figs. 3(a)–3(c) are readily associated with periodic orbits known from literature, namely, the “bouncing ball,” the double diamond, or the “whispering gallery” orbits. Some of the wave functions show distinct scars. Figure 3(d) shows a wave function belonging to one of the highest frequencies analyzed up to now. Here the disturbing influence of the coupling wire becomes manifest. While the nodal pattern is still clearly discernible, near the expected wave-function maxima one observes minima. It should be possible to reduce this effect by using coupling wires with smaller diameters. In principle diameters of the order of the skin depth (amounting to about 1 μm in the applied microwave range) should be sufficient for the irradiation of the microfrequency.

Using our experimental data we are able to check the validity of the semiclassical approximation (2) for the Green's function. Neglecting the influence of the damping, one obtains from Eqs. (2) and (4) the following expression for $P(q, k)$:

$$P(q, k) \sim \text{Im} \sum_r \{ i^{-3/2} |\Delta_r|^{1/2} \exp(ikl_r - i\pi n_r) \}, \quad (5)$$

where the sum is over all trajectories, not necessarily

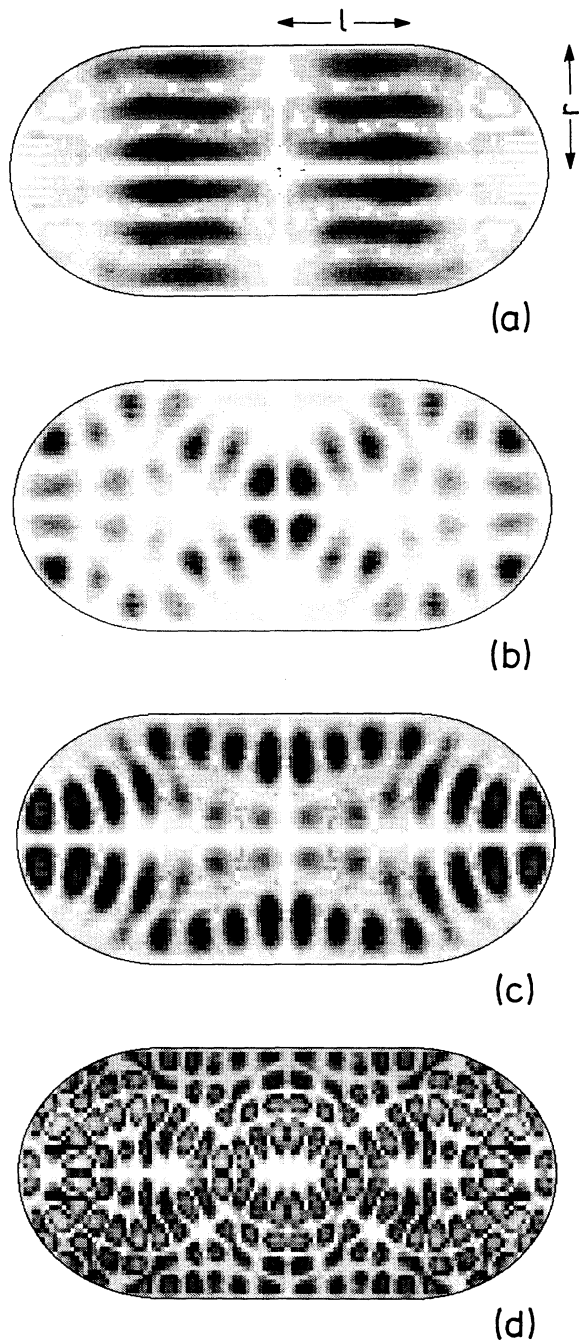


FIG. 3. Selection of stadium eigenfunctions with frequencies (a) 3.384 GHz, (b) 3.865 GHz, (c) 4.056 GHz, and (d) 7.250 GHz. The measurements were performed in a resonator of the shape of a quartered stadium ($l=18$ cm, $r=13.5$ cm). In the illustration the stadium was completed by twofold reflection. High amplitudes of the electric field are shown in black; nodal lines are white.

periodic, starting from and ending at point q . l_r is the length and n_r is the number of reflections of the respective trajectory. Therefore the Fourier transform of $P(q, k)$ with respect to k ,

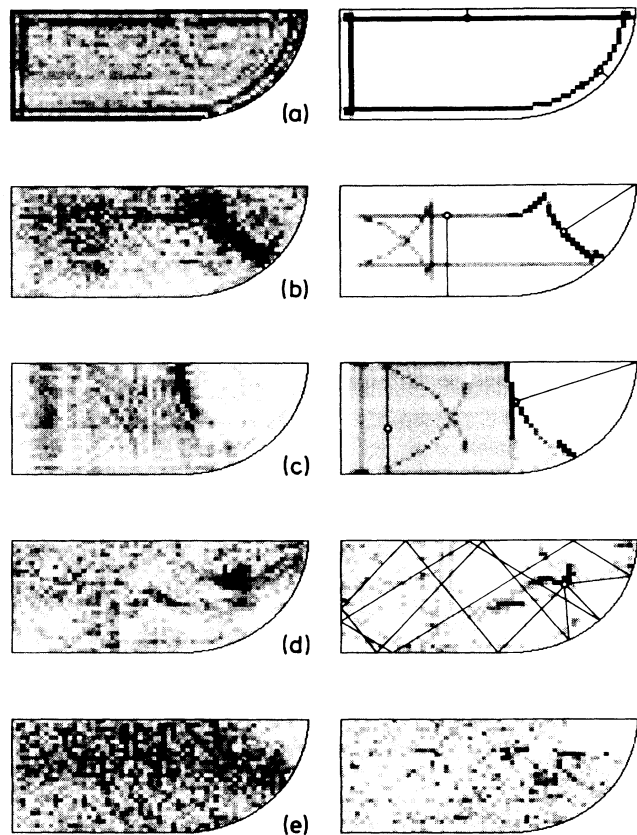


FIG. 4. Fourier transform $\hat{P}(q, l)$ of the experimentally determined eigenfunction spectrum [see Eq. (6)] as a function of position q for (a) $l=2.4$ cm, (b) 19.5 cm, (c) 27.4 cm, (d) 84.1 cm, and (e) 186.0 cm (left column). The classical counterpart calculated from closed classical trajectories [see Eq. (5)] is shown in the right column. For details see text.

$$\hat{P}(q, l) = \int P(q, k) \exp(-ikl) dk, \quad (6)$$

should project all contributions of paths with length l out of the sum (5). The well-known divergence problems associated with Eq. (2) [13] are no longer present in Eq. (6), as only trajectories with length l contribute to $\hat{P}(q, l)$. Its number is always finite (with the possible exception of focal points). In I an analogous procedure was applied to the eigenfrequency spectrum which is obtained by integrating expression (5) over q .

The left part of Fig. 4 shows $|\hat{P}(q, l)|$ for a number of selected l values. The Fourier transform was applied directly to the raw data, thus neglecting the influence of the coupling wire. Nevertheless, closed paths are easily recognized. For small l values the only way to get a closed path is to start at distance $l/2$ from a boundary, go directly to this boundary, and return after a reflection to the starting point [Fig. 4(a)]. For larger l values multiple reflections become possible [Fig. 4(b)]. In Fig. 4(c) the l value corresponds approximately to the length of the bouncing ball orbit. Here every point between the long

sides of the billiard is starting and end point of a closed orbit, leading to a more or less uniform coloring of this region, whereas the region within the quarter circle is colored only weakly. Similar patterns are obtained at multiples of the length of the bouncing ball orbit. At several l values foci show up [Fig. 4(d)]. Here the focusing property of the circle takes effect. At lengths above about 1.5 m the structures disappear more and more. There are, however, exceptions as shown in Fig. 4(e). Here closed trajectories exist for most points in the stadium, but apart from a small region near the upper right corner.

This discussion has already shown that the measured eigenfunctions can be interpreted qualitatively in terms of classical closed trajectories. For a quantitative comparison the right-hand side of Eq. (5) has to be calculated. Instead of calculating the $|\Delta_r|^{1/2}$, which would require one to determine the monodromy matrix for every individual trajectory [6], a brute force method was applied. First the area of the billiard was subdivided into pixels in the same way as in the measurement. Then trajectories were started in different directions in steps of 1° from the center of each pixel [in Fig. 4(e) a step width of 0.25° was chosen to improve the statistics]. Whenever a trajectory reached its starting pixel after length l , a corresponding array variable was increased or decreased by 1, depending on the number of reflections. The value calculated for a pixel is proportional to the density of returning trajectories, i.e., to Δ_r [see the discussion following Eq. (3)]. This is just the square of the weight factor of the trajectory in the semiclassical Green's function. Up to this square, which was not corrected for, the described procedure is therefore able to reproduce expression (6) *quantitatively* (provided that the number of trajectories is sufficiently large). On the right-hand side of Fig. 4 the absolute values of the obtained array variables are plotted. One observes a nearly complete correspondence between the figures on the left-hand side, obtained from the wave functions, and their classical counterparts, obtained from classical trajectories. This shows that Gutzwiller's semiclassical approximation of the Green's function is able to account not only for eigenvalue spectra but also for eigenfunction patterns. In other words, geometrical optics and the de Broglie relation are sufficient to understand both billiard eigenvalue and eigenfunction properties. One point not yet mentioned remains a bit mysterious. To arrive at the correspondence displayed in Fig. 4 it was necessary to reduce the lengths belonging to the figures in the left column by 3 cm. It seems that the coupling wire leads to an effective increase of the lengths of the closed trajectories. Apart from this fact the coupling wire, though changing spectrum and eigenfunctions

moderately, is not able to disturb the correspondence between eigenfunctions and classical trajectories noticeably.

This work has shown that the mapping of billiard eigenfunctions by means of a microwave analog is easily possible. It has further demonstrated that the range of applicability of the semiclassical approximation of the Green's function goes far beyond the interpretation of spectra alone. Further attractive microwave applications lie probably in the field of scattering and localization in disordered media. In a similar way as described in this work it should be possible to study enhanced backscattering, localization of wave functions, etc., within an array of random scatterers. Indeed first experiments in this direction have recently been performed though with a somewhat different technique [14].

We are grateful to B. Eckhardt for numerous fruitful discussions and for valuable suggestions to the manuscript. K.-H. Kretschmer assisted in producing the Chladni figures. The work was sponsored by the Deutsche Forschungsgemeinschaft via the Sonderforschungsbereich "Nichtlineare Dynamik."

Note added.—After the completion of this work we became aware of a recent publication on the same topic [15]. In contrast to the present work the author did not use the reflected microwave power but the shift of the eigenfrequencies to map the eigenfunctions.

-
- [1] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
 - [2] S. W. McDonald and A. N. Kaufman, Phys. Rev. Lett. **42**, 1189 (1979).
 - [3] S. W. McDonald and A. N. Kaufman, Phys. Rev. A **37**, 3067 (1988).
 - [4] E. J. Heller, Phys. Rev. Lett. **53**, 1515 (1984).
 - [5] E. J. Heller, P. W. O'Connor, and J. Gehlen, Phys. Scr. **40**, 354 (1989).
 - [6] E. B. Bogomolny, Physica (Amsterdam) **31D**, 169 (1988).
 - [7] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12**, 343 (1971).
 - [8] M. V. Berry and M. E. Mount, Rep. Prog. Phys. **35**, 315 (1972).
 - [9] H.-J. Stöckmann and J. Stein, Phys. Rev. Lett. **64**, 2215 (1990).
 - [10] F. Melde, *Akustik* (Brockhaus, Leipzig, 1883), p. 191.
 - [11] R. Blümel *et al.*, Phys. Rev. A **45**, 2641 (1992).
 - [12] F. Haake, G. Lenz, P. Šeba, J. Stein, H.-J. Stöckmann, and K. Życzkowski, Phys. Rev. A **44**, 6161 (1991).
 - [13] B. Eckhardt and E. Aurell, Europhys. Lett. **9**, 509 (1989).
 - [14] S. L. McCall, P. M. Platzman, R. Dalichaouch, D. R. Smith, and S. Schultz, Phys. Rev. Lett. **67**, 2017 (1991).
 - [15] S. Sridhar, Phys. Rev. Lett. **67**, 785 (1991).